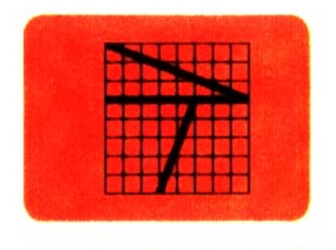
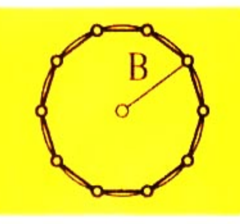
Lecciones populares de matemáticas

NUMEROS DE FIBONACCI

N. N. Vorobiov

1, 1, 2, 3, 1, 0.





Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАУКА

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

N. N. VOROBIOV

NUMEROS DE FIBONACCI

Traducido del ruso por Carlos Vega,
catedrático de Matemáticas Superiores
candidato a doctor en ciencias
físico-matemáticas

EDITORIAL MIR
MOSCU

IMPRESO EN LA URSS,
1974

На испанском языке

INDICE

INTRODUCCION

1. En la antigüedad hubo muchos grandes matemáticos. Numerosos logros de la ciencia matemática antigua admiran hoy todavía por la penetración de sus autores y toda persona culta conoce los nombres de Euclides, Arquímedes y Herón.

Sucedió una época muy distinta para las Matemáticas y, hasta Vieta que vivió en el siglo XVI y matemáticos más próximos a nuestros tiempos, en el curso escolar no se menciona ningún matemático grande. No es casual, claro está. Las Matemáticas se desarrollaron en esa época con suma lentitud y no dieron científicos de talla.

Por eso, tiene aun mayor interés para nosotros la obra «Liber abacci» (Libro del ábaco) escrita por el famoso matemático italiano Leonardo de Pisa conocido más por su apodo Fibonacci (abreviatura de filius Bonacci, o sea, hijo de Bonacci). Este libro, escrito en 1202, llegó a nosotros en su segunda variante que data del año 1228.

«Liber abacci», voluminoso tratado que contiene casi todos los conocimientos algebraicos y aritméticos de aquel tiempo, desempeñó un papel notable en el desarrollo de las Matemáticas en Europa Occidental durante varios siglos. En particular, precisamente a través de este libro conocieron los europeos las cifras hindúes («arábigas»).

El material de «Liber abacci» se explica por numerosos problemas que constituyen una parte considerable de la obra.

Consideremos uno de ellos, el que aparece en las páginas 123 y 124 del manuscrito de 1228.

«¿Cuántas parejas de conejos nacen, en el transcurso de un año, de una pareja inicial?»

«Alguien metió una pareja de conejos en un lugar total-

mento cercado de muros para conocer cuántas parejas de conejos nacerían en el curso de un año si la naturaleza de los conejos es tal que cada pareja produce otra pareja al cabo de un mes y las conejas pueden parir a los dos meses de haber nacido. Puesto que la primera pareja da descendencia el primer mes, multiplíquese por dos y resultan ya 2 parejas; de ellas, una pareja, la primera, produce también al mes siguiente de modo que en el segundo mes resultan 3 parejas; de ellas, al mes siguiente dos parejas darán descendencia de modo que en el tercer mes nacerán dos parejas más y el número de parejas llegará a 5; de ellas, ese mismo mes darán descendencia tres parejas y al cuarto mes el número de parejas llegará a 8; de ellas, cinco parejas producirán otras cinco que sumadas a las ocho darán al quinto mes 13 parejas; de ellas, cinco parejas nacidas ese mes no darán descendencia, pero las ocho restantes sí, de modo que al sexto mes resultarán 21 parejas; sumadas a las trece nacidas en el séptimo mes, darán 34 parejas; sumadas a las 21 nacidas en el octavo mes, darán 55 parejas; sumadas a las 34 nacidas en el noveno mes, darán 89 parejas; sumadas a las 55 que nacen en el décimo mes, darán 144 parejas; sumadas otra vez a las 89 que nacen en el undécimo mes, darán 233 parejas; sumadas otra vez a las 144 parejas nacidas en el último mes, darán 377 parejas; esta cantidad de parejas produce la pareja inicial en el lugar dado al cabo de un año. Al margen puede verse cómo lo hacemos: sumamos el primer número y el segundo, o sea, 1 y 2; el segundo y el tercero; el tercero y el cuarto; el cuarto y el quinto y así sucesivamente hasta sumar el décimo y el undécimo, o sea, 144 y 233. Obtenemos el número total de las parejas mencionadas, o sea, 377. Y así se puede hacer en el mismo orden hasta un número infinito de meses.»

Pareja inicial
1 pareja
Primer mes
2 parejas
Segundo mes
3 parejas
Tercer mes
5 parejas
Cuarto mes
8 parejas
Quinto mes
13 parejas
Sexto mes
21 parejas
Séptimo mes
34 parejas
Octavo mes
55 parejas
Noveno mes
84 parejas
Décimo mes
144 parejas
Undécimo mes
233 parejas
Duodécimo mes
377 parejas

2. Pasemos ahora de los conejos a los números y consideremos la sucesión numérica

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, \quad (1)$$

en la que todo término es igual a la suma de los dos anteriores, es decir, para todo $n > 2$ se tiene

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \quad (2)$$

Sucesiones de este tipo, donde todo término se determina en función de los anteriores, aparecen frecuentemente en las Matemáticas y se denominan sucesiones *recurrentes*. El proceso que consiste en el cálculo sucesivo de sus elementos se denomina *proceso recurrente* y la igualdad (2) se llama *ecuación recurrente*. El lector hallará los elementos de la teoría general de sucesiones recurrentes en el libro de A. I. Markushévich («Sucesiones recurrentes», Editorial Mir, 1974).

Observemos, ante todo, que la relación (2) no permite por sí sola calcular los términos de la sucesión (1). Se pueden encontrar infinitas sucesiones numéricas diferentes que satisfagan esta condición, por ejemplo,

$$2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \ldots,$$
$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots,$$
$$-1, -5, -6, -11, -17, \ldots,$$

etc.

Es decir, para determinar unívocamente la sucesión (1) no basta obviamente con la condición (2) y es preciso señalar algunas condiciones adicionales. Por ejemplo, podemos indicar los valores de unos cuantos primeros términos de la sucesión (1). ¿Cuántos primeros términos de la sucesión (1) hay que definir para calcular, empleando sólo la condición (2), todos los demás términos?

Señalemos primeramente que la relación (2) no permite obtener cualquier término de la sucesión (1) porque no todo término de (1) tiene dos precedentes; por ejemplo, delante del primer término no figura ninguno y al segundo le precede sólo uno. Por eso, para determinar la sucesión (1) debemos señalar, además de la condición (2), sus dos primeros términos.

Obviamente, esto basta ya para poder encontrar cualquier término de la sucesión (1). En efecto, podemos calcular u_3 sumando los valores escogidos para u_1 y u_2, podemos

calcular u_4 sumando u_2 y el valor obtenido para u_3, podemos calcular u_5 sumando los valores obtenidos para u_3 y u_4, etc. y «en el mismo orden hasta un número infinito» de términos. Pasando así de dos términos consecutivos de la sucesión al término que les sigue inmediatamente, podemos llegar hasta el término de cualquier índice fijado de antemano y calcularlo.

3. Consideremos ahora un caso de especial importancia: la sucesión (1) cuando se toma $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$. La condición (2), como hemos señalado, nos brinda la posibilidad de calcular uno tras otro todos los términos de esta sucesión. Es fácil comprobar que los trece primeros términos serán los números

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 y 377

con los que hemos tropezado en el problema de los conejos. En memoria del autor de este problema, la sucesión (1) con $u_1 = u_2 = 1$ se llama *sucesión de Fibonacci* y sus términos se denominan *números de Fibonacci*.

Los números de Fibonacci poseen una serie de propiedades interesantes e importantes a las que está dedicado nuestro libro.

§ 1
PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NUMEROS DE FIBONACCI

1. Calculemos, para empezar, la suma de los n primeros números de Fibonacci. En concreto, demostremos que

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1. \qquad (1.1)$$

Efectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - u_2, \\ u_2 &= u_4 - u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1} &= u_{n+1} - u_n, \\ u_n &= u_{n+2} - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades, encontramos

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

y sólo queda recordar que $u_2 = 1$.

2. Para la suma de los números de Fibonacci de índices impares se tiene

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}. \tag{1.2}$$

Para demostrar este resultado tomemos

$$u_1 = u_2,$$
$$u_3 = u_4 - u_2,$$
$$u_5 = u_6 - u_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}.$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades, obtenemos la buscada.

3. Para la suma de los números de Fibonacci de índices pares, se tiene

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \tag{1.3}$$

Según el punto 1,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1;$$

restando de esta igualdad miembro por miembro la igualdad (1.2), obtenemos

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

como queríamos demostrar.

Restando, además, miembro por miembro (1.3) de (1.2), encontramos

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1. \tag{1.4}$$

Sumemos ahora u_{2n+1} a ambos miembros de (1.4):

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1. \tag{1.5}$$

Uniendo (1.4) y (1.5), obtenemos la suma alternada de los números de Fibonacci

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1. \tag{1.6}$$

4. Las fórmulas (1.1) y (1.2) han sido deducidas sumando miembro por miembro varias igualdades evidentes. Esta misma idea se puede emplear, por ejemplo, para deducir la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros núme-

ros de Fibonacci

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_nu_{n+1}. \qquad (1.7)$$

Para ello fijémosnos en que

$$u_ku_{k+1}-u_{k-1}u_k=u_k(u_{k+1}-u_{k-1})=u_k^2.$$

Sumando miembro por miembro las igualdades

$$u_1^2=u_1u_2,$$
$$u_2^2=u_2u_3-u_1u_2,$$
$$u_3^2=u_3u_4-u_2u_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n^2=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n$$

encontramos la fórmula (1.7).

5. Muchas relaciones entre los números de Fibonacci se pueden demostrar fácilmente empleando el método de inducción completa.

La esencia del método de inducción completa (llamado a menudo método de inducción matemática) consiste en lo siguiente: para demostrar que cierta afirmación es válida para cualquier número natural basta probar que:

a) es válida para el número 1 y

b) de su validez para un número natural cualquiera n se desprende su validez para el número $n+1$.

Toda demostración inductiva de una afirmación que incluya un número natural n consta, por lo tanto, de dos partes.

En la primera parte (relativamente sencilla por lo general) se demuestra que la afirmación es válida para 1. Esta primera parte se denomina a veces *base de la inducción*. En la segunda parte (que suele ser más compleja) se supone que la afirmación es válida para un número arbitrario (pero fijo) n y, a partir de esta hipótesis que frecuentemente se denomina *hipótesis inductiva*, se demuestra que la afirmación es válida también para el número $n+1$. Esta segunda parte lleva el nombre de *paso inductivo*.

Una exposición detallada de diferentes variantes del método de inducción completa, acompañada de múltiples ejemplos, se puede encontrar en el libro de I. S. Sominski «El método de la inducción matemática» (Editorial MIR, 1974). En particular, la variante basada en el paso inductivo «de n y $n+1$ a $n+2$» (que utilizaremos reiteradamente) aparece en el libro de Sominski en el punto 4 de la introducción y se aclara con el ejemplo 7 y el problema 12.

A veces se aplica el razonamiento inductivo que puede ser llamado paso «de todos los números menores que n al número n». En este caso huelga la base inductiva ya que, hablando convencionalmente, la demostración para $n=1$ consiste en el paso de «todos» los núme-

ros enteros positivos menores que uno (que simplemente no existen) al uno.

Precisamente así se demuestra que todo número natural puede ser descompuesto en factores primos.

Supongamos que todos los números menores que n pueden ser descompuestos en factores primos. Si el número n es primo, es descomposición de sí mismo. Si el número n es compuesto, puede ser, por definición, representado como el producto de dos factores por lo menos: $n = n_1n_2$, donde $n_1 \neq 1$ y $n_2 \neq 1$. Pero en este caso resulta que $n_1 < n$ y que $n_2 < n$ y, de acuerdo con la hipótesis inductiva, tanto n_1 como n_2 se descomponen en factores primos. Por lo tanto, también n se descompone en factores primos.

La demostración del teorema del punto 36 del § 2 se basa en una variante aun más compleja del razonamiento inductivo.

6. La realización más sencilla de la idea de la inducción en el caso de los números de Fibonacci es la propia definición de estos números. Consiste, como hemos explicado en la introducción, en indicar los dos primeros números de Fibonacci, $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$, y en aplicar el paso inductivo de u_n y u_{n+1} a u_{n+2} condicionado por la relación recurrente

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2}.$$

En particular, de aquí resulta inmediatamente que es sucesión de Fibonacci toda sucesión de números que comienza con dos unos y en la que cada número siguiente se obtiene sumando los dos anteriores.

A título de ejercicio, consideremos «el problema del saltador» que consiste en lo siguiente.

El saltador puede desplazarse en una sóla dirección a lo largo de una franja cuadriculada saltando cada vez a la casilla inmediata o por encima de ella a la siguiente. ¿Cuántos modos de desplazarse en $n - 1$ casillas y, en particular, de la primera a la n-ésima tiene el saltador? (Se considera que dos modos son idénticos si en cada uno de ellos el saltador se posa en las mismas casillas.)

Sea x_n el número buscado. Es evidente que $x_1 = 1$ (pues existe un sólo modo de pasar de la primera casilla a la primera, a saber, no realizar salto alguno) y que $x_2 = 1$ (ya que existe un sólo modo de pasar de la primera casilla a la inmediata que consiste en un sólo salto a esa casilla). Supongamos que el saltador quiere llegar a la $(n + 2)$-ésima casilla. Por definición, el número total de modos que tiene para alcanzar este objetivo es x_{n+2}. Pero estos modos se dividen en dos clases: la que comienza con el salto a la segunda

casilla y la que comienza con el salto a la tercera. Para llegar a la $(n+2)$-ésima casilla el saltador tiene x_{n+1} modos si arranca de la segunda y x_n modos si arranca de la tercera. Por lo tanto, la sucesión de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ verifica la relación recurrente

$$x_n + x_{n+1} = x_{n+2},$$

o sea, coincide con la sucesión de los números de Fibonacci: $x_n = u_n$.

7. Demostremos, empleando la inducción, la siguiente fórmula importante

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}. \quad (1.8)$$

Para demostrarla aplicaremos la inducción según m. Si $m = 1$, la fórmula da $u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$ y es evidente. Si $m = 2$, la fórmula (1.8) es también evidente porque

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n.$$

Hemos demostrado así la base de la inducción. El paso inductivo lo realizaremos en la forma siguiente: aceptando que la fórmula (1.8) es válida para $m = k$ y para $m = k+1$, demostraremos que también es válida para $m = k+2$. Es decir, sea

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1} \text{ y } u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}.$$

Sumando miembro por miembro las dos últimas igualdades, obtenemos

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

como queríamos demostrar.

Es fácil explicar (e incluso demostrar) la fórmula (1.8) en términos del problema del saltador.

En verdad, el número total de modos que tiene el saltador para desplazarse de la primera casilla a la $(n+m)$-ésima es igual a u_{n+m}. Entre ellos habrá modos en que el saltador pasa por encima de la n-ésima casilla y otros en que se detiene en ella.

En todos los modos de la primera clase, el saltador tiene que llegar a la $(n-1)$-ésima casilla (puede hacerlo de u_{n-1} modos), saltar después a la $(n+1)$-ésima casilla y, finalmente, desplazarse en las $(n+m)-(n+1) = m-1$ casillas restantes (esto último puede hacerlo de

u_m modos). Por lo tanto, la primera clase comprende un total de $u_{n-1}u_m$ modos. Análogamente, en los modos de la segunda clase el saltador llega a la n-ésima casilla (u_n modos) y después pasa a la $(n+m)$-ésima casilla (valiéndose de uno de los u_{m+1} modos que tiene para ello). Por consiguiente, la segunda clase comprende un total de $u_n u_{m+1}$ modos y con esto queda demostrada la fórmula (1.8).

8. Poniendo $m = n$ en la fórmula (1.8), obtenemos

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1},$$

o sea,

$$u_{2n} = u_n (u_{n-1} + u_{n+1}). \qquad (1.9)$$

De esta igualdad resulta que u_{2n} es divisible por u_n. En el parágrafo siguiente demostraremos un resultado mucho más general.

Puesto que

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1},$$

la fórmula (1.9) puede ser expresada así

$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}),$$

es decir,

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$$

o sea, la diferencia de los cuadrados de dos números de Fibonacci cuyos índices difieren en dos es de nuevo un número de Fibonacci.

Por analogía (poniendo $m = 2n$), se puede probar que

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

9. Más adelante será útil la fórmula siguiente

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}. \qquad (1.10)$$

Demostrémosla empleando la inducción según n. Para $n = 1$ la fórmula (1.10) dice

$$u_2^2 = u_1 u_3 - 1$$

lo cual es evidente.

Supongamos ahora que la fórmula (1.10) ha sido demostrada para un valor de n. Sumemos $u_n u_{n+1}$ a ambos miembros. Tendremos

$$u_n^2 + u_n u_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + u_n u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

ó

$$u_n(u_n+u_{n+1})=u_{n+1}(u_{n-1}+u_n)+(-1)^{n+1},$$

o sea,

$$u_nu_{n+2}=u_{n+1}^2+(-1)^{n+1},$$

es decir,

$$u_{n+1}^2=u_nu_{n+2}+(-1)^{n+2}.$$

Con esto queda argumentado el paso inductivo y demostrada la fórmula (1.10) para cualquier n.

10. Igual que han sido demostradas estas propiedades de los números de Fibonacci, se puede demostrar también estas otras

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\ldots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2,$$

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\ldots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1,$$

$$nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\ldots+2u_{n-1}+u_n=u_{n+4}-(n+3),$$

$$u_1+2u_2+3u_3+\ldots+nu_n=nu_{n+2}-u_{n+3}+2.$$

La demostración queda al albedrío del lector.

11. Tanto interés como los números de Fibonacci tienen los llamados *coeficientes binomiales*.

Los coeficientes binomiales son los coeficientes que tienen las potencias de x en el desarrollo de $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n. \qquad (1.11)$$

Es obvio que los números C_n^k se determinan unívocamente para todos los valores enteros positivos de n y para todos los valores enteros no negativos de k que no pasan de n.

En muchos razonamientos matemáticos es funcional recurrir a los coeficientes binomiales. También nos serán útiles en el estudio de las propiedades de los números de Fibonacci. Además, existen vínculos directos entre los coeficientes binomiales y los números de Fibonacci; más adelante revelaremos ciertas regularidades que existen entre ambas clases de números.

Demostremos, previamente, algunas propiedades de los coeficientes binomiales.

Poniendo $n=1$ en (1.11), vemos inmediatamente que

$$C_1^0=C_1^1=1;$$

además, tiene lugar el lema siguiente.

Lema. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Demostración. Tenemos

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x),$$

o sea, empleando la definición de los coeficientes binomiales

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} =$$
$$= (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n)(1+x) =$$
$$= C_n^0 + (C_n^0 + C_n^1) x + (C_n^1 + C_n^2) x^2 + \ldots$$
$$\ldots + (C_n^{n-1} + C_n^n) x^n + C_n^n x^{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$C_{n+1}^0 = C_n^0,$$
$$C_{n+1}^1 = C_n^0 + C_n^1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n+1}^{n+1} = C_n^n$$

como queríamos demostrar.

De este lema resulta que los coeficientes binomiales se pueden calcular aplicando un proceso recurrente, análogo al que permite obtener los números de Fibonacci, pero mucho más complejo. Esto permite demostrar, empleando la inducción, distintas propiedades de los coeficientes binomiales.

12. Consideremos los coeficientes binomiales en forma de la siguiente tabla llamada *triángulo de Pascal*

$$C_0^0$$
$$C_1^0 C_1^1$$
$$C_2^0 C_2^1 C_2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$C_n^0 C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

es decir,

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Se acostumbra numerar las filas del triángulo de Pascal empezando por arriba y aceptando que la fila superior compuesta por un sólo uno es la fila cero.

De lo anterior resulta que los términos extremos de cada una de las filas del triángulo de Pascal son iguales a uno y que todos los demás se obtienen sumando los dos términos respectivos de la fila anterior.

13. La fórmula (1.11) permite obtener de inmediato dos importantes relaciones que vinculan los coeficientes binomiales correspondientes a una misma fila del triángulo de Pascal.

Tomando $x = 1$ en (1.11), encontramos

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

Por otro lado, tomando $x = -1$, obtenemos

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

14. Demostremos empleando la inducción según n que

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot k}. \tag{1.12}$$

Esta fórmula suele emplearse como definición de los coeficientes binomiales. Determina el coeficiente binomial como el número de combinaciones de orden k formadas con n elementos. Hemos ido por otro camino, menos tradicional, que en nuestro caso es preferible.

Si convenimos en que el producto de una cantidad nula de factores es siempre igual a 1, obtenemos de (1.12) tomando $k = 0$ el resultado $C_n^0 = 1$ que ya conocemos. Teniendo esto en cuenta, podemos limitarnos al caso en que $k \geqslant 1$.

Para $n = 1$ resulta

$$C_1^1 = \frac{1}{1} = 1.$$

Supongamos ahora que la fórmula (1.12) es válida para un valor determinado de n cualquiera que sea el valor de k ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Consideremos el número C_{n+1}^k. Puesto que $k \geqslant 1$, tenemos

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k,$$

o sea, empleando la hipótesis inductiva (1.12),

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots n-k+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)} +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)k} =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)}\left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right) =$$
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)} \frac{k+n-k+1}{k} =$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)k} = C_{n+1}^k.$$

La última igualdad es la fórmula (1.12) aplicada a los coeficientes binomiales que se encuentran en la fila siguiente (es decir, en la $(n + 1)$-ésima fila) del triángulo de Pascal.

15. Tracemos por los elementos del triángulo de Pascal las líneas que forman 45° con sus filas llamándolas diagonales ascendentes del triángulo de Pascal. Por ejemplo, serán diagonales ascendentes la recta que pasa por los números 1, 4 y 3 ó la recta que pasa por los números 1, 5, 6 y 1.

La suma de los números que pertenecen a una misma diagonal ascendente es un número de Fibonacci.

Efectivamente, la primera diagonal ascendente (la superior) del triángulo de Pascal consta sólo del uno. También la segunda diagonal consta sólo del uno. Para demostrar el resultado que nos interesa bastará probar que la suma de todos los elementos que componen la n-ésima y la $(n + 1)$-ésima diagonales del triángulo de Pascal es igual a la suma de los números pertenecientes a su $(n + 2)$-ésima diagonal.

Pero los números de la n-ésima diagonal son

$$C_{n-1}^0,\ C_{n-2}^1,\ C_{n-3}^2,\ \ldots$$

y los de la $(n + 1)$-ésima diagonal son

$$C_n^0,\ C_{n-1}^1,\ C_{n-2}^2,\ \ldots$$

La suma de estos números es

$$C_n^0+(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)+(C_{n-2}^1+C_{n-2}^2)+\dots,$$

o sea, recordando el lema del punto 11,

$$C_{n+1}^0+C_n^1+C_{n-1}^2+\dots$$

La última expresión es la suma de los elementos que pertenecen a la $(n+2)$-ésima diagonal ascendente del triángulo.

De aquí, basándonos en la fórmula (1.1) obtenemos inmediatamente que la suma de todos los coeficientes binomiales que se encuentran en la n-ésima diagonal ascendente del triángulo de Pascal y por encima de ésta es igual a $u_{n+2}-1$.

Empleando las fórmulas (1.2), (1.3) y (1.4) y otras semejantes, el lector podrá encontrar sin dificultad otras identidades que vinculan los números de Fibonacci y los coeficientes binomiales.

16. Hasta aquí hemos definido los números de Fibonacci mediante la ecuación recurrente, o sea, empleando la inducción según el índice. Pero resulta que todo número de Fibonacci puede ser definido de un modo directo, es decir, como función de su índice.

Estudiemos con este fin las distintas sucesiones u_1, u_2, ..., u_n, ... que satisfacen la ecuación

$$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}. \tag{1.13}$$

Diremos que todas estas sucesiones son *soluciones de la ecuación* (1.13).

En adelante indicaremos por V, V' y V'' las sucesiones

$$v_1, v_2, v_3, \dots,$$
$$v_1', v_2', v_3', \dots \text{ y}$$
$$v_1'', v_2'', v_3'', \dots$$

Demostremos, primero, dos lemas elementales.

Lema 1. *Si V es una solución de la ecuación* (1.13) *y c es una constante, también la sucesión cV* (*o sea, la sucesión cv_1, cv_2, cv_3, ...*) *es una solución de esta ecuación.*

Demostración. Multiplicando por c ambos miembros de la igualdad

$$v_n=v_{n-1}+v_{n-2},$$

obtenemos

$$cv_n=cv_{n-2}+cv_{n-1}$$

como queríamos demostrar.

Lema 2. *Si las sucesiones V' y V'' son soluciones de la ecuación* (1.13), *también la suma* $V' + V''$ (*o sea, la sucesión* $v'_1 + v''_1, v'_2 + v''_2, v'_3 + v''_3, \ldots$) *es solución de esta ecuación.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos

$$v'_n = v'_{n-1} + v'_{n-2} \quad \text{y} \quad v''_n = v''_{n-1} + v''_{n-2}.$$

Sumando estas igualdades miembro por miembro, encontramos

$$v'_n + v''_n = (v'_{n-1} + v''_{n-1}) + (v'_{n-2} + v''_{n-2}).$$

Con esto queda demostrado el lema.

Sean ahora V' y V'' dos soluciones no proporcionales de la ecuación (1.13) (es decir, dos soluciones de la ecuación (1.13) tales que cualquiera que sea la constante c habrá un número n para el que $\frac{v'_n}{v''_n} \neq c$). Mostremos que toda sucesión V, solución de la ecuación (1.13), puede ser representada así

$$V = c_1 V' + c_2 V'', \tag{1.14}$$

donde c_1 y c_2 son unas constantes. Por esta razón se suele decir que (1.14) es *la solución general* de la ecuación (1.13).

Demostremos primero que siendo V' y V'' dos soluciones no proporcionales de la ecuación (1.13), se tiene

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \tag{1.15}$$

(o sea, que la no proporcionalidad se manifiesta ya en los dos primeros términos de las sucesiones V' y V'').

Demostremos (1.15) por el absurdo. Supongamos que para dos soluciones no proporcionales V' y V'' de la ecuación (1.13) se tiene

$$\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{v'_2}{v''_2}. \tag{1.16}$$

Formando la proporción derivada, resulta

$$\frac{v'_1 + v'_2}{v''_1 + v''_2} = \frac{v'_2}{v''_2},$$

o sea, recordando que V' y V'' son soluciones de la ecuación (1.13),

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_2}{v''_2}.$$

Análogamente comprobamos (¡inducción!) que

$$\frac{v'_3}{v''_3}=\frac{v'_4}{v''_4}=\ldots=\frac{v'_n}{v''_n}=\ldots$$

Por consiguiente, de (1.16) resulta que las sucesiones V' y V'' son proporcionales lo que contradice la hipótesis; es decir, es válida la relación (1.15).

Tomemos ahora una sucesión V, solución de la ecuación (1.13). Según hemos explicado en el punto 2 de la introducción, esta sucesión queda perfectamente determinada si se indican sus dos primeros términos v_1 y v_2.

Busquemos los valores de c_1 y c_2 de modo que sea

$$\begin{aligned} c_1v'_1+c_2v''_1&=v_1,\\ c_1v'_2+c_2v''_2&=v_2. \end{aligned} \qquad (1.17)$$

En este caso, la suma $c_1V'+c_2V''$ coincidirá, debido a los lemas 1 y 2, con la sucesión V.

En virtud de la condición (1.15), el sistema de ecuaciones (1.17) tiene solución respecto a c_1 y c_2 cualesquiera que sean los números v_1 y v_2:

$$c_1=\frac{v_1v''_2-v_2v''_1}{v'_1v''_2-v''_1v'_2} \quad \text{y} \quad c_2=\frac{v'_1v_2-v'_2v_1}{v'_1v''_2-v''_1v'_2}.$$

(La condición (1.15) significa que el denominador de ambas fracciones es distinto de cero.) Introduciendo en (1.14) los valores obtenidos para c_1 y c_2 encontramos la representación requerida de la sucesión V.

Es decir, para describir *todas* las soluciones de la ecuación (1.13) basta encontrar *dos* soluciones no proporcionales de la misma.

Busquemos estas soluciones entre las progresiones geométricas. Según el lema 1, basta considerar las progresiones cuyos primeros términos son 1. Tomemos, pues, la progresión

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots$$

Para que sea una solución de la ecuación (1.13), es suficiente que para todo n se cumpla la igualdad

$$q^{n-2}+q^{n-1}=q^n$$

o, dividiendo por q^{n-2},

$$1+q=q^2. \qquad (1.18)$$

Las raíces de esta ecuación, es decir, los números $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, serán las razones buscadas de las progresiones. Indiquémoslas por α y β, respectivamente. Los números α y β, como raíces de la ecuación (1.18), satisfacen las relaciones $1+\alpha=\alpha^2$, $1+\beta=\beta^2$ y $\alpha\beta=-1$.

Hemos obtenido de esta forma dos progresiones geométricas, soluciones ambas de (1.13). Por eso, todas sucesiones de tipo

$$c_1+c_2,\ c_1\alpha+c_2\beta,\ c_1\alpha^2+c_2\beta^2,\ \ldots \tag{1.19}$$

son soluciones de la ecuación (1.13). Las progresiones halladas tienen distintas razones y, por ende, no son proporcionales, o sea, la fórmula (1.19) con distintos valores de c_1 y de c_2 ofrece todas las soluciones de (1.13).

En particular, para ciertos valores de c_1 y de c_2 la fórmula (1.19) debe coincidir con la sucesión de Fibonacci. Para ello, como hemos explicado, hay que determinar c_1 y c_2 de las ecuaciones

$$c_1+c_2=u_1 \text{ y } c_1\alpha+c_2\beta=u_2,$$

es decir, del sistema

$$c_1+c_2=1,$$

$$c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1.$$

Resolviéndolo, encontramos

$$c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

de modo que

$$u_n=c_1\alpha^{n-1}+c_2\beta^{n-1}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

o sea,

$$u_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{1.20}$$

La expresión (1.20) lleva el nombre de *fórmula de Binet* (en memoria del matemático que la encontró).

Es evidente que fórmulas de este tipo se pueden encontrar también para otras soluciones de (1.13). Proponemos al lector deducirlas en el caso de las sucesiones indicadas en el punto 2 de la introducción.

17. Hemos visto que $\alpha^2 = \alpha + 1$. Está claro, por eso, que toda potencia entera positiva del número α puede ser representada en la forma $a\alpha + b$, donde a y b son números enteros. Por ejemplo,

$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1,$$
$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 2 + \alpha = $$
$$= 3\alpha + 2,$$

etc.

Demostremos (por inducción) que

$$\alpha^n = u_n\alpha + u_{n-1}.$$

En efecto, para $n = 2$ y 3 esto es cierto. Supongamos que

$$\alpha^k = u_k\alpha + u_{k-1} \quad \text{y} \quad \alpha^{k+1} = u_{k+1}\alpha + u_k.$$

Sumando estas igualdades, obtenemos

$$\alpha^k + \alpha^{k+1} = (u_k + u_{k+1})\alpha + (u_{k-1} + u_k),$$

o sea,

$$\alpha^{k+2} = u_{k+2}\alpha + u_{k+1}$$

y con esto queda argumentado el paso inductivo.

18. La fórmula de Binet es apropiada para hallar la suma de muchas series relacionadas con los números de Fibonacci.

Determinemos, por ejemplo, la suma de

$$u_3 + u_6 + u_9 + \ldots + u_{3n}.$$

Tenemos

$$u_3 + u_6 + \ldots + u_{3n} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + \ldots + \alpha^{3n} - \beta^3 - \beta^6 - \ldots - \beta^{3n});$$

sumando las progresiones geométricas que aquí aparecen, encontramos

$$u_3 + u_6 + \ldots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} = \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1}\right).$$

Pero

y, análogamente, $\beta^3 = 1 + 2\beta$. Por eso,

$$u_3+u_6+\ldots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{2\alpha}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{2\beta}\right);$$

simplificando, resulta

$$u_3+u_6+\ldots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\alpha^2-\beta^{3n+2}+\beta^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2}}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}(u_{3n+2}-u_2)=\frac{u_{3n+2}-1}{2}.$$

19. Veamos otro ejemplo de aplicación de la fórmula de Binet: determinemos la suma de los cubos de los n primeros números de Fibonacci.

Observemos, ante todo, que

$$u_k^3=\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3=\frac{1}{5}\,\frac{\alpha^{3k}-3\alpha^{2k}\beta^k+3\alpha^k\beta^{2k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}}-3\alpha^k\beta^k\,\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\,[u_{3k}-(-1)^k\,3u_k]=\frac{1}{5}\,[u_{3k}+(-1)^{k+1}\,3u_k].$$

De aquí que

$$u_1^3+u_2^3+\ldots+u_n^3=$$

$$=\frac{1}{5}\,\{(u_3+u_6+\ldots+u_{3n})+3\,[u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}\,u_n]\},$$

de donde, empleando la fórmula (1.6) y los resultados del punto anterior, resulta

$$u_1^3+u_2^3+\ldots+u_n^3=\frac{1}{5}\left[\frac{u_{3n+2}-1}{2}+(-1)^{n+1}\,3u_{n-1}\right]=$$

$$=\frac{u_{3n+2}+(-1)^{n+1}\,6u_{n-1}-1}{10}.$$

20. Es oportuno plantear la cuestión de la rapidez con que crecen los números de Fibonacci cuando aumenta el índice. La fórmula de Binet permite dar una respuesta bastante completa.

Es fácil demostrar el teorema siguiente.

Teorema. *El número de Fibonacci u_n es el entero más próximo al número $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, o sea, es el entero más próximo al*

n-ésimo término a_n de la progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ y cuya razón es α.

Demostración. Basta demostrar que el valor absoluto de la diferencia entre u_n y a_n es siempre menor que $\frac{1}{2}$. Pero

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}.$$

Puesto que $\beta = -0{,}68\ldots$, se tiene $|\beta| < 1$, es decir, $|\beta|^n < 1$ para todo n; con mayor razón $\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ (ya que $\sqrt{5} > 2$). Hemos demostrado el teorema.

Modificando la demostración de este teorema, el lector familiarizado con la teoría de los límites podrá fácilmente probar que

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - a_n| = 0.$$

El teorema demostrado permite calcular los números de Fibonacci empleando las tablas de logaritmos.

Calculemos, por ejemplo, u_{14} (que es, dicho sea de paso, la respuesta al problema de Fibonacci de los conejos):

$$\sqrt{5} = 2{,}2361, \quad \lg\sqrt{5} = 0{,}34949;$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180, \quad \lg\alpha = 0{,}20898;$$

$$\lg\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14\cdot 0{,}20898 - 0{,}34949 = 2{,}5762,$$

$$\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376{,}9.$$

El número entero más próximo a 376,9 es 377 y este es, precisamente, u_{14}.

En el caso de un número de Fibonacci de índice grande no podremos determinar todas sus cifras basándonos en las tablas de logaritmos (sólo podremos calcular algunas de sus primeras cifras) por lo cual el cálculo resulta aproximado.

A título de ejercicio el lector puede demostrar que en el sistema decimal u_n tiene para $n \geqslant 17$ no más de $\frac{n}{4}$ y no menos de $\frac{n}{5}$ cifras. ¿Cuántas cifras tiene u_{1000}?

21. El resultado del punto anterior se puede precisar con el teorema siguiente que será útil más adelante.

Teorema. *Se tiene*

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\alpha^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}.$$

Demostración. Limitémosnos a demostrar la primera desigualdad; la otra se demuestra de un modo análogo.

De la fórmula de Binet resulta que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n);$$

puesto que $\alpha\beta = -1$, basta demostrar para nuestros fines que

$$\alpha^{n-\frac{1}{n}} \leqslant \alpha^n - \frac{1}{\alpha^n}$$

o que

$$\alpha^{2n-\frac{1}{n}} \leqslant \alpha^{2n} - 1,$$

es decir, elevando a la n-ésima potencia, que

$$\alpha^{2n^2-1} \leqslant (\alpha^{2n} - 1)^n. \qquad (1.21)$$

Demostraremos esta desigualdad por inducción. Para $n = 1$ se convierte en

$$\alpha \leqslant \alpha^2 - 1$$

que es, en efecto, lo que ocurre (precisamente con el signo de igualdad). Siendo $n = 2$, la desigualdad (1.21) significa que

$$\alpha^7 \leqslant (\alpha^4 - 1)^2. \qquad (1.22)$$

Esto se puede demostrar realizando el cálculo directo. Pero también podemos recurrir al resultado encontrado en el punto 17: tenemos

$$\alpha^4 = 3\alpha + 2,$$

$$(\alpha^4 - 1)^2 = (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 10$$

y, por eso, la desigualdad (1.22) significa que

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \leqslant 15\alpha + 10$$

lo cual es evidente. En fin, para $n = 3$ la desigualdad (1.21) dice

$$\alpha^{17} \leqslant (\alpha^6 - 1)^3$$

y se comprueba de modo análogo.

Supongamos ahora que $n > 2$ y que (1.21) es válida; demostremos que

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \leqslant (\alpha^{2n+2} - 1)^{n+1}.$$

Para ello basta probar que al aumentar n en uno, el segundo miembro de (1.21) crece con mayor rapidez que el primero. Pero es obvio que

el primer miembro crece en α^{4n+2} veces. Estimemos el crecimiento del segundo miembro.

Tenemos

$$\frac{(\alpha^{2(n+1)}-1)^{n+1}}{(\alpha^{2n}-1)^n}=[\alpha^{2(n+1)}-1]\left[\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right]^n.$$

La última fracción es mayor que α^2 ya que

$$\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}-\alpha^2=\frac{\alpha^{2n+2}-1-\alpha^{2n+2}+\alpha^2}{\alpha^{2n}-1}=$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}-1}=\frac{1}{\alpha^{2n-2}+\alpha^{2n-4}+\ldots+\alpha^2+1}>\frac{1}{\alpha^{2n-1}}.$$

Por consiguiente,

$$\left[\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right]^n>\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n=\alpha^{2n}+n\,\frac{\alpha^{2n-2}}{\alpha^{2n-1}}+\ldots,$$

donde los puntos suspensivos corresponden a sumandos positivos.

Puesto que $n>2$, la última suma es mayor que $\alpha^{2n}+1$. Por eso,

$$\frac{[\alpha^{2(n+1)}-1]^{n+1}}{(\alpha^{2n}-1)^n}>[\alpha^{2(n+1)}-1](\alpha^{2n}+1)=$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n}-1=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n}(\alpha^2-1)-1=$$

$$=\alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+1}-1>\alpha^{4n+2}$$

y queda demostrado el teorema.

22. Consideremos una clase más de sucesiones basadas en los números de Fibonacci. Sea x un número arbitrario. Calculemos la suma

$$s_n(x)=u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n.$$

Para ello apliquemos, ante todo, la fórmula de Binet:

$$s_n(x)=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}x^2+\ldots+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}x^n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha x+\alpha^2x^2+\ldots+\alpha^nx^n)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta x+\beta^2x^2+\ldots+\beta^nx^n). \qquad (1.23)$$

Entre paréntesis aparecen las sumas de dos progresiones geométricas de razones αx y βx. La fórmula que se emplea para calcular la suma de una progresión geométrica es aplicable sólo si la razón es diferente del uno. Si la razón es igual al uno, todos los términos de la progresión coinciden y la suma se calcula fácilmente,

Por eso, consideremos primero el caso $\alpha x \neq 1$ y $\beta x \neq 1$, o sea $x \neq \frac{1}{\alpha} = -\beta$ y $x \neq \frac{1}{\beta} = -\alpha$. Sumando entonces las progresiones geométricas que figuran en (1.23), obtenemos

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\alpha^{n+1}x^{n+1} - \alpha x}{\alpha x - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\beta^{n+1}x^{n+1} - \beta x}{\beta x - 1}$$

o, después de transformaciones lógicas,

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(\alpha^{n+1}x^{n+1} - \alpha x)(\beta x - 1) - (\beta^{n+1}x^{n+1} - \beta x)(\alpha x - 1)}{(\alpha x - 1)(\beta x - 1)},$$

de donde resulta

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\alpha^{n+1}\beta x^{n+2} - \alpha^{n+1}x^{n+1} + \alpha x}{\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} - \\ - \frac{\alpha\beta^{n+1}x^{n+2} - \beta^{n+1}x^{n+1} + \beta x}{\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1}.$$

Recordando que $\alpha\beta = -1$, $\alpha + \beta = 1$ y $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, tenemos

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{x\sqrt{5} - (\alpha^n - \beta^n)x^{n+2} - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})x^{n+1}}{1 - x - x^2}$$

y definitivamente

$$s_n(x) = \frac{x - u_n x^{n+2} - u_{n+1}x^{n+1}}{1 - x - x^2}. \tag{1.24}$$

En particular, tomando $x = 1$, encontramos

$$s_n(1) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1 - u_n - u_{n+1}}{-1} = u_{n+2} - 1$$

lo que concuerda con lo dicho en el punto 1.

Si $x = -1$, tenemos

$$s_n(-1) = u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n = \\ = \frac{-1 - u_n(-1)^{n+2} - u_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1} = (-1)^{n+1} u_{n-1} - 1$$

(véase la fórmula (1.6)).

Consideremos ahora los casos «especiales».

Sea $x = \frac{1}{\alpha} = -\beta$. Entonces todo término de la primera progresión de (1.23) es igual a uno y la suma de esta progresión es n. Por otro lado, la segunda progresión es de razón $-\beta^2$.

Es decir,

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,[n-(\beta^2-\beta^4+\ldots+(-1)^{n-1}\beta^{2n})]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[n-\frac{\beta^2-(-1)^n\beta^{2n+2}}{1+\beta^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[n-\frac{\beta^2}{1+\beta^2}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right].$$

Observando que

$$1+\beta^2=2+\beta=2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

y que

$$\frac{\beta^2}{1+\beta^2}=\frac{1+\beta}{2+\beta}=\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})\,(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})\,(5+\sqrt{5})}=\frac{10-2\sqrt{5}}{20},$$

obtenemos en definitiva

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{n}{\sqrt{5}}-\frac{5\sqrt{5}-5}{2}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{5\sqrt{5}-5}{2}. \qquad (1.25)$$

Sea, finalmente, $x=\frac{1}{\beta}$. Entonces, en (1.23) es igual a uno la razón de la segunda progresión, mientras que la razón de la primera es $-\alpha^2$. Tenemos, pues,

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,[(\alpha^2-\alpha^4+\ldots+(-1)^{n-1}\alpha^{2n})-n]$$

y de la misma forma encontramos

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\alpha^2-(-1)^n\alpha^{2n+2}}{1+\alpha^2}-n\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^{n+1}\alpha^{2n}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}-n\right]$$

obteniendo, en definitiva,

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=(-1)^{n+1}\,\frac{1+\sqrt{5}}{10}\,\alpha^{2n}+\frac{1+\sqrt{5}}{10}-\frac{n}{\sqrt{5}}. \qquad (1.26)$$

23. Analicemos el comportamiento de $s_n(x)$ cuando x se fija y n crece indefinidamente.

Pasando en la igualdad (1.23) al límite según n, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} [(\alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^n x^n) - $$
$$- (\beta x + \beta^2 x^2 + \ldots + \beta^n x^n)] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} (\alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^n x^n) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} (\beta x + \beta^2 x^2 + \ldots + \beta^n x^n).$$

Aquí en ambos límites nos encontramos con las sumas de dos progresiones geométricas. Por eso, los propios límites representan las sumas de las progresiones geométricas infinitas correspondientes. Pero es sabido que se puede hablar de la suma de una progresión geométrica infinita si, y sólo si, el valor absoluto de la razón es menor que el uno. Las razones de nuestras progresiones son αx y βx. Puesto que $|\alpha| > |\beta|$, resulta que $|\alpha x| < 1$ implica $|\beta x| < 1$. Es decir, el cumplimiento de la desigualdad $|\alpha x| < 1$ garantiza la existencia de ambos límites que en este momento nos ocupan.

Por consiguiente, el límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \tag{1.27}$$

existe si $|x| < \frac{1}{\alpha}$. Indiquemos este límite por $s(x)$. Para calcularlo podemos recurrir a la fórmula (1.24).

Observemos con este fin que, como hemos explicado en el punto 20,

$$u_n \leqslant \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1.$$

Por eso,

$$\lim_{n\to\infty} u_n x^{n+2} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1\right) x^{n+2} =$$
$$= \frac{x^2}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} (\alpha x)^n + \lim_{n\to\infty} x^{n+2}.$$

Puesto que $|\alpha x| < 1$, resulta que $|x| < 1$ de modo que ambos límites son iguales a cero. Por la misma razon tenemos

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} x^{n+1} = 0.$$

Es decir, pasando en la fórmula (1.24) al límite cuando n crece indefinidamente, encontramos

$$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-u_nx^{n+2}-u_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2}=$$

$$=\frac{1}{1-x-x^2}\left(x-\lim_{n\to\infty} u_nx^{n+2}-\lim_{n\to\infty} u_{n+1}x^{n+1}\right)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

En forma desarrollada este resultado puede ser representado así

$$u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+\ldots=\frac{x}{1-x-x^2}. \qquad (1.28)$$

Dando a la variable x unos u otros valores, obtendremos diferentes fórmulas concretas. Por ejemplo, tomando $x=$ $=\frac{1}{2}$, encontramos que

$$\frac{u_1}{2}+\frac{u^2}{2^2}+\ldots+\frac{u_n}{2^n}+\ldots=2.$$

24. La fórmula (1.28) se puede obtener basándose en otros razonamientos.

Consideremos la expresión

$$u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+\ldots=s(x) \qquad (1.29)$$

$\left(\text{sin olvidar que tiene sentido sólo para } |x|<\frac{1}{\alpha}\right)$ y multipliquemos ambos miembros por x y por x^2:

$$u_1x^2+u_2x^3+\ldots+u_nx^{n+1}+\ldots=xs(x), \qquad (1.30)$$

$$u_1x^3+u_2x^4+\ldots+u_nx^{n+2}+\ldots=x^2s(x). \qquad (1.31)$$

Restando de la igualdad (1.29) ambas igualdades (1.30) y (1.31) y reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$u_1x+(u_2-u_1)x^2+(u_3-u_2-u_1)x^3+$$
$$+(u_4-u_3-u_2)x^4+\ldots+(u_n-u_{n-1}-u_{n-2})x^n+\ldots=$$
$$=(1-x-x^2)s(x).$$

Es obvio que en el primer miembro resultan iguales a cero todas las expresiones comprendidas en los paréntesis y, por eso, esta igualdad significa que

$$x=(1-x-x^2)s(x),$$

de donde se desprende (1.28).

25. Hasta aquí hemos aceptado que el índice n del número de Fibonacci u_n es un número entero positivo. Pero la ecuación recurrente principal que determina los números de Fibonacci puede ser escrita así

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1} \tag{1.32}$$

permitiendo expresar los números de Fibonacci de índices menores a través de los números de índices mayores.

Tomando en (1.32) sucesivamente $n = 2, 1, 0, -1, \ldots$, podemos ver que

$$u_0 = 0, \quad u_{-1} = 1, \quad u_{-2} = -1, \quad u_{-3} = 2, \ldots;$$

en general, es fácil persuadirse (compruébese) de que

$$u_{-n} = (-1)^{n+1} u_n. \tag{1.33}$$

Esta sencilla expresión permite reducir todos los problemas relacionados con los números de Fibonacci de índice entero arbitrario a problemas donde se manejan números de Fibonacci corrientes (de índices naturales).

Por ejemplo, para hallar la suma de los n «primeros hacia atrás» números de Fibonacci

$$u_{-1} + u_{-2} + \ldots + u_{-n}$$

basta representarla, basándose en (1.33), así

$$u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n$$

y recordar la fórmula (1.6)

$$u_{-1} + u_{-2} + \ldots + u_{-n} = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1 = -u_{-n+1} + 1.$$

Basándose en (1.32), todo razonamiento inductivo de tipo «de n y de $n + 1$ a $n + 2$» referente a los números de Fibonacci se puede realizar según el esquema «de n y de $n - 1$ a $n - 2$». En particular, así se demuestra sin dificultad que la importante fórmula (1.8)

$$u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}$$

es válida para todos los números enteros n y m.

26. Las fórmulas principales para α y β

$$\alpha^{n+2} = \alpha^n + \alpha^{n+1} \quad \text{y} \quad \beta^{n+2} = \beta^n + \beta^{n+1},$$

demostradas para los valores enteros positivos de n, son válidas para todo valor entero de n (subsisten incluso para los

valores fraccionarios de n, pero no nos detendremos en ello). De aquí es fácil deducir que la fórmula de Binet

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

tiene lugar para todo valor entero de n.

Observemos, para concluir, que el resultado del punto 17 también se puede demostrar (por inducción «hacia atrás») para los valores negativos del índice:

$$\alpha^{-n} = u_{-n}\alpha + u_{-n-1}. \qquad (1.34)$$

Podemos expresar esta igualdad también así

$$(-1)^n \beta^n = (-1)^n u_n \frac{1}{\beta} + (-1)^n u_{n+1},$$

o sea,

$$\beta^{n+1} = u_{n+1}\beta + u_n.$$

Además, podemos representar (1.34) en la forma

$$\alpha^{-n} = (-1)^{n-1} u_n\alpha + (-1)^n u_{n+1},$$

es decir,

$$(-1)^n \alpha^{-n} = u_{n+1} - u_n\alpha$$

o, en otras palabras,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha = (-1)^n \alpha^{-n} \frac{1}{u_n}. \qquad (1.35)$$

§ 2
PROPIEDADES DE LOS NUMEROS DE FIBONACCI RELACIONADAS CON LA TEORIA DE LOS NUMEROS

1. Consideremos ahora algunas propiedades de los números de Fibonacci relacionadas con su divisibilidad.

Teorema. *Si n es divisible por m, también u_n es divisible por u_m.*

Demostración. Supongamos que n es divisible por m, o sea, que $n = mk$. Basaremos la demostración en la inducción según k.

Para $k = 1$ se tiene $n = m$ y es evidente que u_n divisible por u_m. Supongamos ahora que u_{mk} es divisible por u_m

y consideremos $u_{m(k+1)}$. Pero $u_{m(k+1)} = u_{mk+m}$ y, en virtud de (1.8),

$$u_{m(k+1)} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1}.$$

Es evidente que u_m divide el primer sumando del segundo miembro. El segundo sumando es múltiplo de u_{mk}, o sea, también es divisible por u_m según la hipótesis inductiva. De aquí se desprende que la suma de estos sumandos, o sea, $u_{m(k+1)}$, es divisible por u_m. Hemos demostrado el teorema.

2. Tomemos ahora un número m. Si existe un número de Fibonacci u_n divisible por m, habrá infinitos números de Fibonacci con esta propiedad, por ejemplo, además de u_n, los números u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, . . .

Es interesante, por eso, conocer si, dado un número m, existe al menos un número de Fibonacci divisible por m. Resulta que sí.

Sea $\overline{k}$ el resto de la división de k por m. Consideremos la sucesión formada por los pares de restos de la división de los números de Fibonacci por m:

$$\langle \overline{u}_1, \overline{u}_2\rangle, \quad \langle \overline{u}_2, \overline{u}_3\rangle, \quad \langle \overline{u}_3, \overline{u}_4\rangle, \ \ldots, \ \langle \overline{u}_n, \overline{u}_{n+1}\rangle, \ \ldots \qquad (2.1)$$

Aceptando que dos pares $\langle a_1, b_1\rangle$ y $\langle a_2, b_2\rangle$ son iguales si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$, tendremos que el número total de distintos pares de restos de la división por m es igual a m^2. Ello significa que entre los $m^2 + 1$ primeros términos de la sucesión (2.1) hay necesariamente dos iguales.

Sea $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$ el primer par repetido de la sucesión (2.1). Demostremos que es el par $\langle 1, 1\rangle$. En efecto, supongamos lo contrario, o sea, que el primer par repetido es $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$, donde $k > 1$. Localicemos en (2.1) un par $\langle \bar{u}_l, \bar{u}_{l+1}\rangle$ $(l > k)$ igual al par $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$. Puesto que $u_{l-1} = u_{l+1} - u_l$, $u_{k-1} = u_{k+1} - u_k$, $\bar{u}_{l+1} = \bar{u}_{k+1}$ y $\bar{u}_l = \bar{u}_k$, resulta que también son iguales los restos de la división de u_{l-1} y de u_{k-1} por m, o sea, $\bar{u}_{l-1} = \bar{u}_{k-1}$. De aquí se deduce que también $\langle \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k\rangle = \langle \bar{u}_{l-1}, \bar{u}_l\rangle$; pero en la sucesión (2.1) el par $\langle \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k\rangle$ precede al par $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$; luego, $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$ no es el *primer* par repetido y como esto contradice nuestra hipótesis resulta que no puede ser $k > 1$, o sea, que debe ser $k = 1$.

Por consiguiente, $\langle 1, 1\rangle$ es el primer par que se repite en la sucesión (2.1). Aceptemos que se repite en la t-ésima

posición (como hemos explicado debe ser $1 < t < m^2 + 1$):

$$\langle \bar{u}_t, \ \bar{u}_{t+1} \rangle = \langle 1, \ 1 \rangle.$$

Esto significa que u_t y u_{t+1}, divididos por m, dan 1 como resto. De aquí se desprende que la diferencia de estos números es divisible por m. Pero

$$u_{t+1} - u_t = u_{t-1},$$

resultando así que el número de Fibonacci u_{t-1} es divisible por m.

Hemos demostrado de esta forma el teorema siguiente.

Teorema. *Cualquiera que sea el número entero m, entre los $m^2 - 1$ primeros números de Fibonacci habrá al menos uno divisible por m.*

Subrayemos que este teorema no dice nada acerca de *qué* número de Fibonacci será divisible por m. Sólo deja constancia de que el primer número de Fibonacci divisible por m no debe ser muy grande. Más adelante volveremos a este problema.

Puesto que $\langle 1, 1 \rangle$ es el primer par repetido de la sucesión (2.1), resulta que la sucesión de restos se repite a partir de $\bar{u}_t$, o sea, que esta sucesión es periódica. Por ejemplo, si $m = 4$, el período de la sucesión de restos es

$$1, \ 1, \ 2, \ 3, \ 1, \ 0. \tag{2.2}$$

En este caso la longitud del período es igual a 6. Por consiguiente, si n es $6k + 1$, $6k + 2$ ó $6k + 5$, el resto de la división de u_n por 4 es 1; si n es $6k + 3$, el resto es 2 y, si n es $6k + 4$, el resto es 3.

3. Es de gran interés el estudio de la naturaleza aritmética de los números de Fibonacci, o sea, el estudio de sus divisores. Demostremos que siendo n un número compuesto distinto de 4, el número u_n es compuesto.

En efecto, para tales n tenemos $n = n_1 n_2$, donde $1 < n_1 < n$ y $1 < n_2 < n$ siendo, además, $n_1 > 2$ ó $n_2 > 2$. Supongamos, para concretar, que $n_1 > 2$. Del teorema anterior resulta entonces que u_n es divisible por u_{n1} con la particularidad de que $1 < u_{n1} < u_n$ y esto significa que u_n es un número compuesto.

4. Antes de continuar el estudio de los números de Fibonacci, veamos con el lector algunos resultados elementales de la Teoría de los números.

Expliquemos primero el proceso de determinación del máximo común divisor de dos números a y b.

Efectuemos la división entera de a por b. Sea q_0 el cociente y sea r_1 el resto:

$$a = bq_0 + r_1, \text{ donde } 0 \leqslant r_1 < b.$$

Fijémosnos en que para $a < b$ se tiene $q_0 = 0$.

Dividamos ahora b por r_1 determinando el cociente q_1 y el resto r_2: $b = r_1 q_1 + r_2$, donde $0 \leqslant r_2 < r_1$. Puesto que $r_1 < b$, debe ser $q_1 \neq 0$. Dividiendo después r_1 por r_2, encontraremos $q_2 \neq 0$ y r_3 tales que $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ y $0 \leqslant \leqslant r_3 < r_2$. Procedamos de este modo mientras se pueda prolongar el proceso.

Este proceso, tarde o temprano, deberá interrumpirse ya que todos los enteros positivos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ son distintos y menores que b; luego, la cantidad de estos números no pasa de b y el proceso deberá concluir no más tarde del b-ésimo paso. Puede interrumpirse sólo si una de las divisiones resulta exacta, o sea, si el resto correspondiente resulta igual a cero y no se puede dividir ya por él.

El proceso descrito se conoce como *el algoritmo de Euclides*. Aplicándolo a los números a y b, obtenemos la siguiente sucesión de igualdades

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1 q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Consideremos el último término diferente de cero de la sucesión $a, b, r_1, or_2, \ldots, r_n$. Hablando en términos generales, éste será el resto r_n, pero, en particular, también podrá ser el número b (para conseguir la uniformidad, podemos aceptar que $b = r_0$). Es evidente que r_n divide r_{n-1}. Tomemos ahora la penúltima igualdad (2.3). Ambos sumandos de su segundo miembro son divisibles por r_n de modo que r_n divide también r_{n-2}. Podemos comprobar sucesivamente de la misma forma (¡inducción!) que r_n divide $r_{n-3}, r_{n-4}, \ldots$ y, finalmente b y a. Por lo tanto, r_n es un divisor común de

a y b. Demostremos ahora que r_n es el máximo común divisor de a y b. Para ello basta probar que todo divisor común de a y b divide también r_n.

Sea d un divisor común de a y b. De la primera igualdad (2.3) resulta que d divide r_1. La segunda igualdad (2.3) implica entonces que d divide r_2. Análogamente (¡inducción!) se demuestra que d divide $r_3, \ldots, r_{n-1}$ y, finalmente, r_n.

Hemos demostrado, pues, que el algoritmo de Euclides aplicado a los números naturales a y b permite efectivamente determinar el máximo común divisor de éstos números. Indiquemos por (a, b) el máximo común divisor de los números a y b.

Es evidente que a es divisible por b si, y sólo si, $(a, b) = b$.

A título de ejemplo, determinemos $(u_{20}, u_{15}) = (6765, 610)$:

$$6765 = 610 \cdot 11 + 55,$$
$$610 = 55 \cdot 11 + 5,$$
$$55 = 5 \cdot 11.$$

Es decir,

$$(u_{20}, u_{15}) = 5 = u_5.$$

No es casual que el máximo común divisor de dos números de Fibonacci resulte de nuevo un número de Fibonacci. Más adelante demostraremos que siempre ocurre así.

5. Un proceso análogo al algoritmo de Euclides suele emplearse también en la Geometría al determinar la medida común de dos segmentos conmensurables. En efecto, consideremos dos segmentos: uno de longitud a y otro de longitud b. Restemos el segundo del primero tantas veces como sea posible (si $b > a$, es evidente que no podremos hacerlo ni una vez) e indiquemos por r_1 la longitud del resto. Es obvio que $r_1 < b$. Restemos ahora del segmento de longitud b el segmento de longitud r_1 tantas veces como sea posible e indiquemos por r_2 el resto que resulta. Procediendo de la misma forma, obtendremos una sucesión de segmentos cuyas longitudes disminuyen evidentemente. Como vemos, hasta aquí la semejanza con el algoritmo de Euclides es total.

Sin embargo, desde este momento se observa una diferencia importante entre el proceso geométrico descrito y el algoritmo de Euclides: la sucesión de restos que se obtiene en el caso de los segmentos puede no interrumpirse prolongándose indefinidamente este proceso. Así sucederá, obviamente, si los segmentos iniciales son inconmensurables.

Veamos algunas propiedades elementales del máximo común divisor de dos números.

6. (a, bc) es divisible por (a, b). En efecto, b y, por ende, también bc es divisible por (a, b); está claro que a es divisible por (a, b). Según el punto 4, de aquí resulta que también (a, bc) es divisible por (a, b).

7. Se tiene $(ac, bc) = (a, b)\, c$.

Demostración. Consideremos las igualdades (2.3) que describen el proceso de determinación de (a, b). Multiplicando ambos miembros de cada una por c, obtendremos, como fácilmente se comprueba, un sistema de igualdades que corresponde al algoritmo de Euclides aplicado a los números ac y bc. El último resto no nulo será en este caso r_n, c o sea, $(a, b)\, c$.

8. Si $(a, c) = 1$, se tiene $(a, bc) = (a, b)$. En efecto, según el punto 6, (a, bc) es divisor de (ab, bc). Pero

$$(ab, bc) = (a, c)\, b = 1 \cdot b = b$$

en virtud del punto 7. Por consiguiente, (a, bc) divide b. Por otro lado, (a, bc) es divisible por a. Luego, debido a lo demostrado en el punto 4, (a, bc) también divide (a, b). Pero como, según el punto 6, también (a, b) divide (a, bc), resulta $(a, b) = (a, bc)$.

Supongamos que bc es divisible por a, es decir, que $(a, bc) = a$. Si, además, se tiene $(a, c) = 1$, de lo anterior se deduce que $(a, b) = a$, o sea, que b es divisible por a.

Si p es un número primo, cualquier a es divisible por p o es primo con p. Por eso, de lo anterior resulta: si el producto de dos números es divisible por un primo p, al menos uno de los factores es divisible por p. Empleando la inducción, esta afirmación se hace válida, evidentemente, para un número de factores cualquiera.

9. A título de ejemplo —que servirá más adelante— consideremos uno de los criterios de divisibilidad de los coeficientes binomiales.

Teorema. *Si p es primo y si $k \neq 0$ y $k \neq p$, resulta que C_p^k es divisible por p.*

Demostración. En el punto 14 del § 1 hemos visto que

$$C_p^k = \frac{p\,(p-1)\,\ldots\,(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Esta fracción es un número entero y, por eso, su denominador divide el numerador. Pero todos los factores del denominador son menores que p, o sea, no son divisibles por p. De aquí resulta que el producto de

estos factores (o sea, el denominador) tampoco es divisible, según hemos explicado, por p ya que p es primo. Es decir, el denominador es primo con p.

El numerador es el producto de dos números: p y $(p-1)\ldots$ $\ldots(p-k+1)$. Este producto es divisible por el denominador. Como quiera que el denominador es primo con p, el denominador divide el segundo factor $(p-1)\ldots(p-k+1)$. Sea $(p-1)\ldots$ $\ldots(p-k+1)=t\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$. Entonces se tiene $C_p^k=tp$ como queríamos demostrar.

10. Si c es divisible por b, se tiene $(a, b)=(a+c, b)$.

Demostración. Aplicando el algoritmo de Euclides a los números a y b, llegamos al sistema de igualdades (2.3). Apliquemos este algoritmo a los números $a+c$ y b. Por hipótesis, b divide c, o sea, $c=c_1b$; el primer paso del algoritmo da

$$a+c=(q_0+c_1)\,b+r_1.$$

En todos los demás pasos obtendremos sucesivamente la segunda, la tercera, etc. igualdades del sistema (2.3). El último resto diferente de cero continuará siendo r_n de modo que $(a, b)=(a+c, b)$.

Conviene que el lector demuestre este teorema basándose sólo en los resultados de los puntos 6, 7 y 8, es decir, sin recurrir al algoritmo de Euclides y al sistema (2.3).

11. Teorema. *Los números consecutivos de Fibonacci son primos entre sí.*

Demostración. Supongamos, a despecho de la afirmación, que u_n y u_{n+1} tienen un divisor común $d>1$. La diferencia $u_{n+1}-u_n$ es divisible, entonces, por d. Pero como $u_{n+1}-u_n=u_{n-1}$, resulta que d divide también u_{n-1}. Análogamente se demuestra (¡inducción!) que d divide u_{n-2}, u_{n-3}, etc. y, finalmente, u_1. Pero $u_1=1$ y no puede ser divisible por $d>1$. Hemos llegado a una contradicción; queda demostrado el teorema.

12. Teorema. *Tiene lugar la igualdad*

$$(u_m, u_n)=u_{(m, n)}.$$

Demostración. Supongamos, para concretar, que $m>n$. Apliquemos el algoritmo de Euclides a los números m y n:

$$m=nq_0+r_1, \qquad \text{donde } 0\leqslant r_1<n,$$

$$n=r_1q_1+r_2, \qquad \text{donde } 0\leqslant r_2<r_1,$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3, \quad \text{donde } 0 \leqslant r_3 < r_2,$$

. . . .

$$r_{t-2} = r_{t-1} q_{t-1} + r_t, \text{ donde } 0 \leqslant r_t < r_{t-1},$$

$$r_{t-1} = r_t q_t.$$

Sabemos que r_t es el máximo común divisor de m y n. Puesto que $m = nq_0 + r_1$, resulta que

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0+r_1}, u_n),$$

o sea,

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1} u_{r_1} + u_{nq_0} u_{r_1+1}, u_n),$$

de donde, basándonos en los puntos 1 y 9, tenemos

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1} u_{r_1}, u_n)$$

o, en virtud de los resultados de los puntos 11 y 8,

$$(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n).$$

Análogamente se demuestra que

$$(u_{r_1}, u_n) = (u_{r_2}, u_{r_1}),$$

$$(u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2}),$$

. . . .

$$(u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}}).$$

Comparando estas igualdades, encontramos

$$(u_m, u_n) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}});$$

como quiera que r_t divide r_{t-1} y, por ende, u_{r_t} divide $u_{r_{t-1}}$ debe ser $(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$. Recordando, finalmente, que $r_t = (m, n)$, obtenemos el resultado necesario.

En particular, de aquí se deduce el teorema recíproco al teorema del punto 1: si u_n es divisible por u_m, también n es divisible por m. En efecto, si u_n es divisible por u_m, tenemos, como se ha explicado en el punto 4,

$$(u_n, u_m) = u_m. \tag{2.4}$$

Pero acabamos de demostrar que

$$(u_n, u_m) = u_{(n, m)}. \tag{2.5}$$

Comparando las fórmulas (2.4) y (2.5), encontramos

$$u_m = u_{(n, m)};$$

o sea, $m = (n, m)$ y esto significa precisamente que n es divisible por m.

13. Uniendo el teorema del punto 1 y el corolario del teorema del punto 12, resulta: *u_n es divisible por u_m, si, y sólo si, n es divisible por m.*

En otras palabras, para analizar la divisibilidad de los números de Fibonacci basta estudiar la divisibilidad de sus índices.

Enunciemos, por ejemplo, algunos «criterios de divisibilidad» de los números de Fibonacci entendiendo por tales los criterios que permiten conocer si uno u otro número de Fibonacci es divisible por un número dado.

Un número de Fibonacci es par si, y sólo si, su índice es divisible por 3.

Un número de Fibonacci es divisible por 3 si, y sólo si, su índice es divisible por 4.

Un número de Fibonacci es divisible por 4 si, y sólo si, su índice es divisible por 6.

Un número de Fibonacci es divisible por 5 si, y sólo si, su índice es divisible por 5.

Un número de Fibonacci es divisible por 7 si, y sólo si, su índice es divisible por 8.

El léctor podrá fácilmente demostrar estos criterios y otros por el estilo empleando la proposición enunciada al principio de este punto y considerando, respectivamente, el tercer, el cuarto, el quinto, el sexto, el octavo, etc. números de Fibonacci.

Demuéstrese también que no existen números de Fibonacci que, divididos por 8, dan 4 como resto y que no existen números de Fibonacci a la vez impares y divisibles por 17.

14. Hasta el final de este parágrafo usaremos con frecuencia proposiciones de tipo «los números a y b, divididos por m, dan el mismo resto» o (que viene a ser lo mismo) «la diferencia $a - b$ es divisible por m».

Necesitamos ligereza y seguridad para manejar estas proposiciones y pasar de unas a otras. Por eso, igual que en la Teoría de los números, expresaremos estas proposiciones simbólicamente convirtiéndolas así en elementos de un «cálculo».

Definición. Dos números a y b se llaman *congruentes módulo m* si, divididos por m, dan un mismo resto, o sea, si $a - b$ es divisible por m. Simbólicamente la congruencia módulo m de los números a y b se expresa así

$$a \equiv b (\text{mód } m).$$

Es obvio que siendo a divisible por m se tiene

$$a \equiv 0 \ (\text{mód } m).$$

y viceversa.

15. Las congruencias de un mismo módulo se pueden sumar miembro por miembro lo mismo que las igualdades.

Lema. *Si*

$$a_1 \equiv b_1 \ (\text{mód } m),$$
$$a_2 \equiv b_2 \ (\text{mód } m),$$
$$a_n \equiv b_n \ (\text{mód } m)$$

se tiene

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \ (\text{mód } m).$$

Demostración. Por hipótesis, m divide cada una de las diferencias

$$a_1 - b_1, \ a_2 - b_2, \ \ldots, \ a_n - b_n$$

y, por consiguiente, también divide la suma

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n),$$

o sea, la diferencia

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

como queríamos demostrar.

16. Hemos visto en el punto 9 que siendo p primo y siendo $0 < k < p$, se tiene

$$C_p^k \equiv 0 \ (\text{mód } p). \qquad (2.6)$$

Esto mismo se puede expresar así

$$C_p^{k+1} \equiv 0 \ (\text{mód } p), \qquad (2.7)$$

donde $0 \leqslant k < p - 1$.

Por lo tanto, siendo $0 < k < p - 1$, son válidas ambas congruencias (2.6) y (2.7). Sumándolas, encontramos

$$C_p^k + C_p^{k+1} \equiv 0 \ (\text{mód } p),$$

o sea,

$$C_{p+1}^{k+1} \equiv 0 \ (\text{mód } p),$$

En otras palabras, siendo p primo, todos los elementos de la $(p+1)$-ésima fila del triángulo de Pascal, a excepción de cuatro (los dos extremos de la izquierda y los dos extremos de la derecha), son divisibles por p.

Es fácil ver también que

$$C_{p+1}^0 \equiv C_{p+1}^1 \equiv C_{p+1}^p \equiv C_{p+1}^{p+1} \equiv 1 \ (\text{mód } p).$$

17. La congruencia (2.6) se puede expresar así

$$C_{p-1}^{k-1} + C_{p-1}^k \equiv 0 \ (\text{mód } p)$$

$$C_{p-1}^{k-1} \equiv -C_{p-1}^k \ (\text{mód } p).$$

Esta relación es válida para todo $k = 1, 2, \ldots, p-1$ y, por consiguiente,

$$C_{p-1}^{0} \equiv -C_{p-1}^{1} \equiv C_{p-1}^{2} \equiv -C_{p-1}^{3} \equiv \ldots \equiv C_{p-1}^{p-1} \pmod{p}.$$

Pero $C_{p-1}^{0} = 1$ y, por eso, esta fórmula dice que los elementos de la $(p-1)$-ésima fila del triángulo de Pascal correspondientes a las posiciones impares son congruentes módulo p con 1, mientras que los elementos correspondientes a las posiciones pares son congruentes con -1.

18. Las congruencias de un mismo módulo se pueden también multiplicar miembro por miembro.

Lema. *Si*

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m},$$
$$a_2 \equiv b_2 \pmod{m},$$
$$a_n \equiv b_n \pmod{m},$$

se tiene

$$a_1a_2 \ldots a_n \equiv b_1b_2 \ldots b_n \pmod{m}. \tag{2.9}$$

Demostración. Apliquemos la inducción según n.

Para $n = 1$ el lema es evidente.

Supongamos que es válido para un valor de n (o sea, que (2.8) implica (2.9)) y agreguemos a las condiciones del lema la congruencia

$$a_{n+1} \equiv b_{n+1} \pmod{m}. \tag{2.10}$$

Las congruencias (2.9) y (2.10) significan que las diferencias respectivas $a_1a_2 \ldots a_n - b_1b_2 \ldots b_n$ y $a_{n+1} - b_{n+1}$ son divisibles por m. Es decir,

$$a_1a_2 \ldots a_n = b_1b_2 \ldots b_n + mT \text{ y}$$
$$a_{n+1} = b_{n+1} + mt,$$

donde T y t son números enteros. Multiplicando las igualdades obtenidas, encontramos

$$a_1a_2 \ldots a_na_{n+1} = \\ = b_1b_2 \ldots b_nb_{n+1} + m(b_1b_2 \ldots b_nt + b_{n+1}T + mTt).$$

Entre los paréntesis aparece un número entero y, por eso,

$$a_1a_2 \ldots a_na_{n+1} \equiv b_1b_2 \ldots b_nb_{n+1} \pmod{m},$$

como queríamos demostrar.

De este lema se desprende que se pueden elevar a cualquier potencia entera no negativa ambos miembros de una congruencia.

Como un caso particular de este lema aparece el resultado siguiente: el producto de números de tipo $4t+1$ es del mismo tipo $4t+1$. En efecto, supongamos que los números son $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Por hipótesis, tenemos

$$a_1 \equiv 1 \pmod{4},\ a_2 \equiv 1 \pmod{4},\ \ldots,\ a_n \equiv 1 \pmod{4}.$$

Multiplicando estas congruencias, encontramos

$$a_1a_2 \ldots a_n \equiv 1 \pmod{4}.$$

19. También las reglas de cancelación de las congruencias se asemejan a las que existen para las igualdades: las igualdades se pueden dividir por cualquier número diferente de cero y las congruencias, por todo número primo con el módulo.

Lema. *Si*

$$ac \equiv bc \ (\text{mód } m) \tag{2.11}$$

y $(c, m) = 1$, *se tiene*

$$a \equiv b \ (\text{mód } m). \tag{2.12}$$

Demostración. La congruencia (2.11) significa que la diferencia $ac - bc$ es divisible por m. Pero

$$ac - bc = (a - b)\, c$$

y como $(c, m) = 1$, m debe dividir la diferencia $a - b$, de donde resulta (2.12).

20. En muchos casos resulta útil la siguiente afirmación conocida como «el pequeño teorema de Fermat».

Teorema. *Si p es un número primo que no divide a, se tiene*

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mód } p).$$

Demostración. Consideremos los números

$$a,\ 2a,\ \ldots,\ (p - 1)\, a. \tag{2.13}$$

No hay entre ellos dos congruentes módulo p. En efecto, puesto que $(a, p) = 1$, de

$$ka \equiv la \ (\text{mód } p)$$

resulta, según el punto 19, que

$$k \equiv l \ (\text{mód } p),$$

o sea, que p divide $k - l$ lo cual es imposible pues $0 < k,\ l < p$ y $k \neq l$.

Además, ninguno de los números considerados es divisible por p.

Es decir, todos los números (2.13), divididos por p, dan diferentes restos $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ cada uno de los cuales es distinto de cero. Pero en (2.13) hay $p - 1$ números y, por otro lado, en la división por p se dan también $p - 1$ restos no nulos, todos ellos distintos. Resumiendo, cada uno de los restos $1, 2, \ldots, p - 1$ aparece entre los números $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ (restos de la división de los números (2.13) por p) una vez solamente. Por lo tanto, tenemos

$$a \equiv r_1 \ (\text{mód } p),$$

$$2a \equiv r_2 \ (\text{mód } p),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(p - 1)\, a \equiv r_{p-1} \ (\text{mód } p).$$

Multiplicando miembro por miembro estas congruencias, resulta

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p - 1)\, a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \ldots r_{p-1} \ (\text{mód } p). \tag{2.14}$$

Pero ya sabemos que los números $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ coinciden, salvo el orden, con los números $1, 2, \ldots, p - 1$. Por eso, la con-

gruencia (2.14) puede ser expresada así

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (p-1)\, a^{p-1} \equiv 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod{p}. \qquad (2.15)$$

Observemos, por último, que el producto $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (p-1)$ es primo con p de modo que la congruencia (2.15) puede ser dividida por este número, o sea,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

como queríamos demostrar.

21. Según hemos visto en el punto 2, entre los divisores de los números de Fibonacci figuran todos los números. Ahora mostraremos que se pueden indicar ciertas clases de números de Fibonacci que poseen divisores bastante concretos.

Por ejemplo, tiene lugar el siguiente teorema [1]).

Teorema. *Si el índice del número de Fibonacci es impar, todos sus divisores impares son de tipo* $4t + 1$.

Demostración. Según la fórmula (1.10) (véase el punto 9 del § 1), para n impar se tiene

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + 1,$$

de donde resulta

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = u_{n-1}(u_{n-1} + u_n) - u_n^2 =$$
$$= u_{n-1}^2 + u_{n-1}u_n - u_n^2 = -1. \qquad (2.16)$$

Sea $p \neq 2$ un divisor primo de u_n. De (2.16) se desprende que $u_{n-1}^2 + 1$ es divisible por u_n y, en consecuencia, también por p. Es decir,

$$u_{n-1}^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Elevando a $\frac{p-1}{2}$ ambos miembros de esta congruencia, obtenemos

$$(u_{n-1}^2)^{\frac{p-1}{2}} = u_{n-1}^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Además, $(u_{n-1}, u_n) = 1$ de modo que u_{n-1} no es divisible por p y, según el «pequeño teorema de Fermat», encontramos

$$u_{n-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Pero entonces también

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

o sea, $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Por consiguiente, $\frac{p-1}{2}$ es un número par y esto significa que p es de la forma $4t + 1$.

---

[1] El autor expresa su gratitud a un aficionado a las Matemáticas, residente en Leningrado, que llamó su atención sobre este hecho.

Es decir, todos los divisores primos impares de u_n son de la forma $4t + 1$; según hemos explicado al final del punto 18, de la misma forma serán todos los productos de estos divisores, o sea (véase el punto 5 del § 1), todos los divisores impares de u_n.

22. Según la definición de congruencia, todos los números que, divididos por m, dan un mismo resto son congruentes entre sí módulo m. Al contrario, los números son incongruentes si, divididos por m, dan diferentes restos.

El resto de la división por m puede ser sólo uno de los m números $1, 2, \ldots, m - 1$. Por consiguiente, no puede haber más de m números incongruentes módulo m entre sí.

Sea m impar; tomemos los números

$$-\frac{m-1}{2},\ -\frac{m-3}{2},\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{m-3}{2},\ \frac{m-1}{2}. \quad (2.17)$$

La cantidad de estos números es m y entre ellos no hay dos congruentes módulo m (de lo contrario, la diferencia de esos, distinta al cero y de valor absoluto menor que m, sería divisible por m). En consecuencia, todo número es congruente módulo m con uno de los números (2.17) que se denominan *residuos módulo m absolutamente menores*. El valor absoluto de cualquiera de estos residuos es, obviamente, menor que la mitad del módulo.

Nótese que, siendo m par, también se puede construir el sistema de residuos absolutamente menores pero éste será distinto al (2.17):

$$-\frac{m-2}{2},\ -\frac{m-4}{2},\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{m-2}{2},\ \frac{m}{2}.$$

Para m par no habremos de recurrir al sistema de residuos absolutamente menores.

23. Sea m un número impar no divisible por 5. Consideremos la sucesión de los residuos módulo m de valor absoluto mínimo calculados para los números $5, 2\cdot 5, 3\cdot 5, \ldots, \frac{m-1}{2}\cdot 5$. Por ejemplo, para $m = 21$ esta sucesión es

$$5,\ 10,\ -6,\ -1,\ 4,\ 9,\ -7,\ -2,\ 3 \text{ y } 8.$$

Veamos, para diferentes m, en qué orden aparecen aquí los signos positivo y negativo. Resulta que este orden depende de la última cifra (en el sistema decimal) del número m.

Lema. *Si $m = 10t + 1$, la sucesión de residuos absolutamente menores tiene la estructura siguiente: t términos positivos, t términos negativos, t términos positivos, t términos negativos y t términos positivos.*

Si $m = 10t + 3$, el esquema de secuencia de los signos es: t términos positivos, t términos negativos, t términos positivos, $t + 1$ términos negativos y t términos positivos.

Si $m = 10t + 7$, en la sucesión habrá t términos positivos, $t + 1$ términos negativos, $t + 1$ términos positivos, t términos negativos y $t + 1$ términos positivos.

Si $m = 10t + 9$, tendremos t términos positivos, $t + 1$ términos negativos, $t + 1$ términos positivos, $t + 1$ términos negativos y $t + 1$ terminos positivos.

Demostración. Se lleva a cabo realizando el cálculo directo en cada uno de los casos; nos limitaremos al primero dejando al albedrío del lector el análisis de los restantes.

Sea, pues, $m = 10t + 1$. Es obvio que $5k \leqslant \frac{m-1}{2}$ para $k \leqslant t$ de modo que todos estos números de forma $5k$ son ya residuos módulo m absolutamente menores. En total serán t y el último será $5t$. Puesto que $5(t+1) > \frac{m-1}{2}$, el siguiente residuo absolutamente menor ha de ser negativo (e igual a $-5t+4$). Agregándole sucesivamente $t-1$ cincos, obtendremos la serie de t números negativos que terminará con el -1. A continuación aparecerá el 4 y, tras el, un total de $t-1$ números positivos (hasta el número $4+(t-1)\cdot 5 = 5t-1$ inclusive); después surgirán de nuevo números negativos (del $-5t+3$ al -2, es decir, un total de t nùmeros). Finalmente, con los números del 3 al $5t-2$ obtendremos los ùltimos t términos positivos de la sucesión.

Hemos demostrado la primera afirmación.

En realidad, lo que nos importa en este lema es que para $m = 10t \pm 1$ la sucesión tendrá un número par de términos negativos y para $m = 10t \pm 3$, un número impar.

24. Lema. *Si p es número de tipo $5t \pm 1$, el número $5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ es divisible por p.*

Si p es un número de tipo $5t \pm 2$, el número $5^{\frac{p-1}{2}} + 1$ es divisible por p.

Demostración. Tenemos

$$5 \equiv \varepsilon_1 r_1 \ (\text{mód}\ p),$$

$$2\cdot 5 \equiv \varepsilon_1 r_2 \ (\text{mód}\ p),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p-1}{2}\cdot 5 \equiv \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_{\frac{p-1}{2}} \ (\text{mód}\ p),$$

donde $\varepsilon_h r_h$ es el residuo módulo p absolutamente menor del número $k\cdot 5$; además, $r_h > 0$ mientras que $\varepsilon_h = \pm 1$ determina el signo del residuo.

Multiplicando estas congruencias, encontramos

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2}\cdot 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_1 r_2 \ldots r_{\frac{p-1}{2}} (\text{mód}\ p). \qquad (2.18)$$

El razonamiento que sigue recuerda el empleado en la demostración del pequeño teorema de Fermat.

Cada uno de los números positivos $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ no pasa de $\frac{p-1}{2}$.

Siendo dos de estos números iguales, por ejemplo, $r_h = r_l \left(1 \leqslant k,\ l \leqslant \frac{p-1}{2}\right)$, tendríamos $5k \equiv \pm 5l$ (mód p) y también $k \equiv \pm l$ (mód p) pues $(5, p) = 1$. Pero esto no puede suceder ya que $-p < k - l < k + l < p$ y $k - l \neq 0$. Por consiguiente, todos los números $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ son distintos, o sea, son, salvo el orden, los números $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Como todos estos números son primos con el módulo, podemos dividir la congruencia (2.18) por el producto $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2}$. Así obtenemos

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \text{ (mód } p).$$

Según el lema del punto 23, el producto $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}}$ contiene el factor -1 un número impar de veces si $p = 10t \pm 1$ (como p es impar, esto significa que p es de la forma $5t \pm 1$) y un número par de veces si $p = 10t \pm 3$ (o sea, si p es de la forma $5t \pm 2$).

De aquí se deducen directamente ambas afirmaciones del lema.

25. Estamos en condiciones ahora de demostrar la principal propiedad de divisibilidad de los números de Fibonacci por un número primo.

Teorema. *Si el número primo p es de la forma $5t \pm 1$, el número u_{p-1} es divisible por p. Si p es de la forma $5t \pm 1$, el número u_{p+1} es divisible por p.*

Demostración. Supongamos que p es de la forma $5t \pm 1$. La fórmula de Binet da

$$u_{p-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{p-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{2^{p-1}} [1 + C_{p-1}^1 \sqrt{5} + C_{p-1}^2 (\sqrt{5})^2 + \ldots + C_{p-1}^{p-1} (\sqrt{5})^{p-1} -$$
$$- 1 + C_{p-1}^1 \sqrt{5} - C_{p-1}^2 (\sqrt{5})^2 + \ldots - C_{p-1}^{p-1} (\sqrt{5})^{p-1}]$$

o, después de simplificaciones evidentes,

$$u_{p-1} = \frac{1}{2^{p-2}} (C_{p-1}^1 + C_{p-1}^3 \cdot 5 + C_{p-1}^5 \cdot 5^2 + \ldots + C_{p-1}^{p-2} \cdot 5^{\frac{p-3}{2}}).$$

Hemos visto en el punto 17 que todos los coeficientes binomiales que aquí aparecen son congruentes módulo p con el 1. Por eso,

$$2^{p-1} u_{p-1} \equiv 2 (1 + 5 + \ldots + 5^{\frac{p-3}{2}}) \text{ (mód } p).$$

Sumando la progresión geométrica y tomando en consideración que 2^{p-1} es congruente módulo p con el 1, obtenemos

$$u_{p-1} \equiv \frac{5^{\frac{p-1}{2}} - 1}{2} \pmod{p}.$$

Pero, según el lema anterior, el numerador de la fracción del segundo miembro es divisible por p. Como $(p, 2) = 1$, la fracción es también divisible por p y, en consecuencia, u_{p-1} es divisible por p de modo que queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Pasemos al caso en que p es de la forma $5t \pm 2$. Aplicando, igual que antes, la fórmula de Binet, obtenemos

$$u_{p+1} = \frac{1}{2^p} \left(C_{p+1}^1 + C_{p+1}^3 \cdot 5 + C_{p+1}^5 \cdot 5^2 + \ldots + C_{p+1}^p \cdot 5^{\frac{p-1}{2}}\right).$$

Según el punto 16, todos los sumandos que figuran entre los paréntesis, a excepción de los extremos, son divisibles por p mientras que $C_{p+1}^1 = C_{p+1}^p$, dividido por p, da 1 como resto. Por eso

$$u_{p+1} \equiv \frac{1}{2} \left(1 + 5^{\frac{p-1}{2}}\right) \pmod{p}.$$

Aplicando en este caso el lema anterior, obtenemos que u_{p+1} es divisible por p.

26. Supongamos que u_n es divisible por un número primo p y que todos los números de Fibonacci menores que u_n no son divisibles por p. En tal caso diremos que p es un *divisor propio* de u_n. Por ejemplo, 11 es un divisor propio de u_{10}, 17 es un divisor propio de u_9, etc

Es interesante que cualquier número de Fibonacci, a excepción de u_1, u_2, u_6 y u_{12}, posee al menos un divisor propio.

La demostración de este resultado requiere razonamientos bastante complejos y exige que le dediquemos el resto del parágrafo. A la vez encontraremos algunas propiedades nuevas de divisibilidad de los números de Fibonacci.

27. Empecemos por algunas consideraciones generales.

El importante resultado, al que se llegó en el punto 8, sobre la divisibilidad de un producto por un número primo permite demostrar el teorema llamado a veces «teorema fundamental de la Aritmética».

Teorema. *Todo número natural se descompone de un modo único en producto de factores primos.*

Demostración. Subrayemos, ante todo, que la posibilidad de tal descomposición es un resultado muy sencillo que hemos encontrado ya en el punto 5 del § 1 aplicando el razonamiento inductivo directo.

Con el fin de demostrar la unicidad de la descomposición consideremos dos posibles descomposiciones de un número a en factores primos:

$$p_1 p_2 \ldots p_k = a = q_1 q_2 \ldots q_l.$$

Aceptemos para puntualizar que $k \leqslant l$. El segundo miembro debe ser divisible por p_1. Es decir, como hemos explicado en el punto 8, p_1 debe dividir al menos uno de los factores del segundo miembro. Supongamos, para concretar, que q_1 es divisible por p_1. Puesto que el

número q_1 es primo, esto puede darse sólo si $p_1 = q_1$. Simplificaremos obteniendo

$$p_2 \ldots p_k = q_2 \ldots q_l.$$

Repitiendo este razonamiento (¡inducción!) k veces, o sea, hasta agotar los factores del primer miembro, llegaremos a la igualdad

$$1 = q_{k+1} \ldots q_l.$$

Pero esto último es posible sólo si $q_{k+1} = \ldots = q_l = 1$ en cuyo caso no pueden figurar los factores primos $q_{k+1}, \ldots, q_l$ en la descomposición inicial.

Hemos demostrado el teorema.

28. Si agrupamos en potencias los factores iguales de la descomposición de a en factores primos, tendremos

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}. \qquad (2.19)$$

Esta expresión obtenida para el número natural a se denomina *descomposición canónica* del mismo.

A veces, para mayor comodidad, agregaremos a la descomposición canónica factores primos arbitrarios de exponente nulo.

29. Para que un número a de descomposición canónica (2.19) sea divisible por

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k} \qquad (2.20)$$

es necesario y suficiente, desde luego, que sea

$$\beta_1 \leqslant \alpha_1,\ \beta_2 \leqslant \alpha_2,\ \ldots,\ \beta_k \leqslant \alpha_k.$$

(En particular, si algún $\alpha_i = 0$, también debe ser $\beta_i = 0$.)

Ahora podemos dar una explicación nueva de lo que es el máximo común divisor de dos o varios números.

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ unos números naturales y sean $p_1, p_2, \ldots, p_k$ números primos, divisores, por lo menos, de uno de esos números. Consideremos las descomposiciones canónicas de $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \ldots p_k^{\alpha_{1k}}, \\ a_2 &= p_1^{\alpha_{21}} p_2^{\alpha_{22}} \ldots p_k^{\alpha_{2k}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= p_1^{\alpha_{n1}} p_2^{\alpha_{n2}} \ldots p_k^{\alpha_{nk}} \end{aligned} \qquad (2.21)$$

(aquí se tiene $\alpha_{ij} \geqslant 0$ para todos los exponentes). Es evidente que la descomposición canónica de cualquier divisor común d de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no puede tener factores primos diferentes de $p_1, p_2, \ldots, p_k$:

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_k^{\delta_k}.$$

Además, el exponente δ_i no puede superar ninguno de los exponentes $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$ que le corresponden y que figuran con p_i en las descomposiciones de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\delta_i \leqslant \alpha_{1i},\ \delta_1 \leqslant \alpha_{2i},\ \ldots,\ \delta_i \leqslant \alpha_{ni}. \qquad (2.22)$$

Si d es el *máximo* común divisor, los exponentes δ_i deben ser los mayores de los números que satisfacen las desigualdades respectivas (2.22). Pero esto significa que δ_i ha de ser simplemente el menor de los números correspondientes $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$ lo cual se puede expresar así

$$\delta_i = \text{mín}\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}\}.$$

Igual que en el caso de dos números, el máximo común divisor de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se designa por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

30. El concepto de mínimo común múltiplo es, en cierto sentido, dual al concepto de máximo común divisor.

Todo número divisible por los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de descomposiciones canónicas (2.21) debe contener, evidentemente, en su descomposición canónica todos los factores primos que figuran por lo menos en una de las descomposiciones (2.21), o sea, los números $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Además, en la descomposición canónica de un múltiplo común pueden aparecer otros factores «extraños». Por consiguiente, la descomposición canónica de cualquier múltiplo común m de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es de la forma

$$m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_k^{\mu_k} Q,$$

donde Q es el producto de todos los factores primos «extraños», con la particularidad de que para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ se cumplen las desigualdades

$$\mu_i \geqslant \alpha_{1i}, \ \mu_i \geqslant \alpha_{2i}, \ \ldots, \ \mu_i \geqslant \alpha_{ni}. \tag{2.23}$$

Si m es el *mínimo* común múltiplo de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, el factor Q no debe, naturalmente, figurar (o sea, debe ser igual a uno) y los exponentes μ_i deben ser los menores de los números que satisfacen las desigualdades (2.23). Pero esto último significa que μ_i ha de ser simplemente el mayor de los números $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$:

$$\mu_i = \text{máx}\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}\}.$$

El mínimo común múltiplo de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se indica por $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

31. Demostremos un lema auxiliar.

Lema. *Cualesquiera que sean los números* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *se tiene*

$$\begin{aligned}
\text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} &= \\
= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &- \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2\} - \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_3\} - \ldots \\
&\ldots - \text{mín}\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\} + \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} + \\
&+ \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\pm \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

(aquí en la segunda fila aparecen todos los mínimos de dos números, en la tercera, todos los mínimos de tres números, etc.).

Demostración. Podemos aceptar desde el principio, sin perder generalidad, que los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cumplen la condición

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n.$$

En tal caso

$$\text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \alpha_1.$$

Calculemos el valor del segundo miembro de (2.24). Veamos con este fin cuántas veces aparece (algebraicamente) en él cada uno de los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ conviniendo en que de dos números α_i y α_j iguales se toma como mínimo el de mayor índice (esto de ningún modo afectará los valores de las expresiones consideradas).

Observemos primero que α_1 es el mayor de los números considerados. Por lo tanto, aparecerá sólo en la primera fila del segundo miembro de (2.24) y, además, sólo una vez, o sea, α_1 aparece en el segundo miembro de (2.24) con el coeficiente igual a uno.

Veamos ahora cómo aparece en el segundo miembro de (2.24) un número cualquiera α_i $(i > 1)$. En la primera fila figura sólo una vez. En la segunda y en todas las sucesivas hasta la i-ésima inclusive, entra sólo cuando acompaña los mínimos donde α_i aparece con números de índice menor que i. En la fila j-ésima $(j \leqslant i)$ aparecerá tantas veces cuantas combinaciones se pueda formar de $i-1$ números $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{i-1}$ tomados $j-1$ a $j-1$, o sea, C_{i-1}^{j-1} veces (véase el punto 14 del § 1). Por consiguiente, el número α_i aparecerá (algebraicamente) un total de

$$1 - C_{i-1}^1 + C_{i-1}^2 - \ldots \pm C_{i-1}^{i-1}$$

veces.

Pero, en virtud del punto 13 del § 1, esta expresión es igual a cero.

Es decir, el segundo miembro de (2.24) es igual a α_1 y,por ende, al primer miembro; hemos demosrtado el lema.

32. Empleemos este resultado para dar una expresión cómoda del mínimo común múltiplo de varios números.

Teorema. *Se tiene*

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \\ = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_2, a_4) \ldots}{(a_1, a_2)(a_1, a_3) \ldots (a_{n-1}, a_n)(a_1, a_2, a_3, a_4) \ldots}. \tag{2.25}$$

(Aquí en el numerador figura el producto de los números considerados y de los máximos comunes divisores de todas las combinaciones posibles formadas por tres, cinco, etc. de estos números, mientras que en el denominador aparece el producto de los máximos comunes divisores de todas las combinaciones formadas por dos, cuatro, etc. de estos números.)

Demostración. Sea p un factor primo cualquiera que aparece en las descomposiciones canónicas de algunos de los números $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$. Indiquemos por α_i el exponente que acompaña p en la descomposición canónica de a_i. En el primer miembro de (2.25) este factor figura, según el punto 30, con el exponente

$$\text{máx}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \tag{2.26}$$

y en el segundo miembro aparece, de acuerdo con el punto 29, con el exponente

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-\\&-\min\{\alpha_1,\alpha_2\}-\min\{\alpha_1,\alpha_3\}-\ldots-\min\{\alpha_{n-1},\alpha_n\}+\\&+\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}+\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}+\cdots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\pm\min\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Del lema anterior se deduce que las expresiones (2.26) y (2.27) son iguales.

Es decir, las descomposiciones canónicas de ambos miembros de (2.25) contienen idénticos factores con iguales exponentes.

33. Volvamos a la divisibilidad de los números de Fibonacci.

Lema.

$$u_{mn-1}-u_{n-1}^{m} \quad \textit{es divisible por } u_n^2. \tag{2.28}$$

Demostración. Apliquemos la inducción según m.

Para $m=1$ el dividendo se hace igual a cero y, por ende, es divisible por u_n^2. Supongamos ahora que la relación (2.28) es válida y consideremos la diferencia

$$u_{(m+1)n-1}-u_{n-1}^{m+1}=(u_{mn-1}u_{n-1}+u_{mn}u_n)-u_{n-1}^{m+1}.$$

Tenemos, según la hipótesis inductiva,

$$u_{mn-1}\equiv u_{n-1}^{m} \pmod{u_n^2}.$$

Por consiguiente,

$$u_{(m+1)n-1}-u_{n-1}^{m+1}\equiv u_{n-1}^{m}u_{n-1}+u_{mn}u_n-u_{n-1}^{m+1} \pmod{u_n^2}. \tag{2.29}$$

Pero en el punto 1 hemos visto que u_{mn} es divisible por u_n de modo que

$$u_{nm}u_n\equiv 0 \pmod{u_n^2}$$

y (2.29) se convierte en

$$u_{(m+1)n-1}-u_{n-1}^{m+1}\equiv 0 \pmod{u_n^2}.$$

Hemos demostrado el paso inductivo y también el lema.

34. **Lema.**

$$u_{mn}-u_{n+1}^{m}+u_{n-1}^{m} \quad \textit{es divisible por } u_n^3. \tag{2.30}$$

Demostración. Apliquemos la inducción según m.

Para $m=1$ el dividendo se hace igual a cero y, por ende, es divisible por u_n^3.

Supongamos que la afirmación (2.30) es válida y consideremos la expresión

$$u_{(m+1)n}-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}=u_{mn-1}u_n+u_{mn}u_{n+1}-u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}.$$

Tenemos, según la hipótesis inductiva,

$$u_{mn}\equiv u_{n+1}^{m}-u_{n-1}^{m} \pmod{u_n^3}.$$

Por consiguiente,

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_{mn-1}u_n + u_{n+1}(u_{n+1}^m - u_{n-1}^m) - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \pmod{u_n^3}$$

ó

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_{mn-1}u_n - u_{n-1}^m(u_{n+1} - u_{n-1}) \pmod{u_n^3},$$

es decir,

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_n(u_{mn-1} - u_{n-1}^m) \pmod{u_n^3}.$$

Del lema anterior resulta que la diferencia que aparece en el segundo miembro es divisible por u_n^2. En consecuencia, el segundo miembro es divisible por u_n^3, o sea, es congruente módulo u_n^3 con el cero, como queríamos demostrar.

35. Sea p un número primo. En el punto 1 hemos demostrado que u_{np} es divisible por u_n. Esto significa que al pasar de u_n a u_{np}, por un lado, pueden aparecer nuevos factores primos y, por otro lado, pueden aumentar los exponentes antiguos de los divisores primos de u_n. Ahora demostraremos que sólo puede aumentar el exponente del divisor p, mientras que los demás divisores primos de u_n han de conservar sus exponentes. Además, si $p \neq 2$, su exponente aumenta en 1 todo lo más y si $p = 2$, en 2 a lo sumo.

Teorema. *Si q es un divisor primo de u_n diferente de p, el número $\frac{u_{np}}{u_n}$ no es divisible por q.*

Si p es un divisor primo impar de u_n, el número $\frac{u_{np}}{u_n}$ es divisible por p pero no por p^2.

Si u_n es divisible por 4, el número $\frac{u_{2n}}{u_n}$ es divisible por 2 pero no por 4.

Si u_n es divisible por 2 pero no por 4, el número $\frac{u_{2n}}{u_n}$ es divisible por 4 y no es divisible por 8.

Demostración. Tomando $m = p$, encontramos del lema anterior que

$$u_{np} - u_{n+1}^p + u_{n-1}^p \text{ es divisible por } u_n^3.$$

En el punto 1 hemos visto que u_{np} es divisible por u_n; además

$$u_{n+1}^p - u_{n-1}^p = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1}) = u_n(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1}).$$

Por consiguiente, u_n^2 divide la diferencia

$$\frac{u_{np}}{u_n} - (u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1}). \tag{2.31}$$

De aquí se deduce, en primer lugar, que la diferencia (2.31) es divisible por u_n, o sea, que

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1} \pmod{u_n}. \tag{2.32}$$

Pero como

$$u_{n+1} \equiv u_{n-1} \ (\text{mód } u_n),$$

de (2.32) se desprende que

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-1} + \ldots + u_{n+1}^{p-1} \ (\text{mód } u_n).$$

Puesto que el segundo miembro contiene p sumandos, debe ser

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv p u_{n+1}^{p-1} \ (\text{mód } u_n).$$

Por consiguiente, todo divisor común de los números $\frac{u_{np}}{u_n}$ y u_n debe dividir también p y viceversa de modo que

$$\left(\frac{u_{np}}{u_n}, \ u_n\right) = (p, \ u_n).$$

Si q es un divisor primo de u_n distinto de p, el número (p, u_n) no es divisible por q; luego, $\left(\frac{u_{np}}{u_n}, u_n\right)$ tampoco es divisible por q. Pero u_n es divisible por q que, por consiguiente, no puede dividir $\frac{u_{np}}{u_n}$ y queda demostrada la primera parte del teorema.

En segundo lugar, puesto que la diferencia (2.31) es divisible por u_n^2, tenemos

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2} u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1} \ (\text{mód } p^2).$$

Sea

$$u_{n+1} \equiv r_1 p + r' \ (\text{mód } p^2),$$
$$u_{n-1} \equiv r_2 p + r'' \ (\text{mód } p^2),$$

donde $0 \leqslant r_1, r_2, r', r'' < p$ (como quiera que la diferencia $u_{n+1} - u_{n-1}$ es igual a u_n, o sea, es divisible por p, los restos r' y r'' deben ser iguales; pongamos entonces $r' = r'' = r$; salta a la vista que $r \neq 0$ ya que u_{n-1} y u_{n+1} no son divisibles por p).

En estas condiciones,

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv (r_1 p + r)^{p-1} + (r_1 p + r)^{p-2} (r_2 p + r) + \ldots$$
$$\ldots + (r_1 p + r)^{p-k} (r_2 p + r)^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (r_2 p + r)^{p-1} \ (\text{mód } p^2).$$

Suprimamos los paréntesis en el segundo miembro omitiendo los términos divisibles por p^2. El término

$$(r_1 p + r)^{p-k} (r_2 p + r)^{k-1}$$

dará entonces

$$C_{p-k}^1 r_1 p r^{p-k-1} r^{k-1} + r^{p-k} C_{k-1}^1 r_2 p r^{k-2} + r^{p-k} r^{k-1},$$

o sea,

$$(p-k)\, pr_1 r^{p-2} + (k-1)\, pr_2 r^{p-2} + p^{-1}.$$

Tomando esta expresión para todos los términos, es decir, para $k = 1, 2, \ldots, p$, y sumando, obtenemos

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv \frac{p(p-1)}{2} pr_1 r^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2} pr_2 r^{p-2} + pr^{p-1} \text{ (mód } p^2). \qquad (2.33)$$

Si $p \neq 2$, el número $\frac{p(p-1)}{2}$ es entero y los dos primeros sumandos del segundo miembro de (2.33) son divisibles por p^2 de modo que

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv pr^{p-1} \text{ (mód } p^2).$$

Finalmente, $r^{p-1} - 1$ es divisible por p en virtud del pequeño teorema de Fermát (punto 20); luego, p^2 divide $pr^{-1} - p$ de forma que definitivamente obtenemos

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv p \text{ (mód } p^2).$$

Es decir, el número $\frac{u_{np}}{u_n}$, dividido por p^2, da p como resto o, en otras palabras, es divisible por p pero no por p^2; hemos demostrado la segunda parte del teorema.

Sea ahora $p = 2$. La fórmula (2.33) puede ser expresada entonces así

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 2\,(r_1 + r_2 + r) \text{ (mód 4)}. \qquad (2.34)$$

Si u_n es divisible por 4, los números u_{n-1} y u_{n+1}, divididos por 4 dan el uno como resto lo que puede verse de la sucesión de los restos (2.2). Por consiguiente, en este caso tenemos $r_1 = r_2 = 0$ y $r = 1$ de modo que (2.34) da

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 2 \text{ (mód 4)}$$

lo cual demuestra la tercera parte del teorema.

Supongamos, finalmente, que u_n no es divisible por 4. La sucesión (2.2) permite ver que en este caso $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ y $r = 1$ de modo que (2.34) da

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 0 \text{ (mód 4)}.$$

Resta demostrar que $\frac{u_{2n}}{u_n}$ no es divisible por 8. Pero si sucediese lo contrario, u_{2n} sería divisible por 16 y, según el punto 13, $2n$ sería divisible por 12, o sea, n tendría 6 como divisor; de aquí, a su vez, resultaría que u_n sería divisible por u_6, es decir, por 8, lo que contradice la hipótesis (a saber, que u_n no es divisible siquiera por 4).

Hemos demostrado completamente el teorema.

36. Estamos ahora en condiciones de demostrar la existencia de divisores propios para los números de Fibonacci.

Teorema. *Todo número de Fibonacci, a excepción de u_1, u_2, u_6 y u_{12}, posee por lo menos un divisor propio.*

Demostración. Consideremos el número de Fibonacci u_n. Sea

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

la descomposición canónica del número n.

Tomemos los números de Fibonacci

$$u_{\frac{n}{p_1}}, \; u_{\frac{n}{p_2}}, \; \ldots, \; u_{\frac{n}{p_k}} \tag{2.35}$$

y calculemos el mínimo común múltiplo M de los mismos. Según el punto 32,

$$M = \frac{u_{\frac{n}{p_1}} u_{\frac{n}{p_2}} \ldots u_{\frac{n}{p_k}} \left(u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, u_{\frac{n}{p_3}}\right) \ldots}{\left(u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}\right) \ldots \left(u_{\frac{n}{p_{k-1}}}, u_{\frac{n}{p_k}}\right) \left(u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, u_{\frac{n}{p_3}}, u_{\frac{n}{p_4}}\right) \ldots} \tag{2.36}$$

Pero para cualquier r y para diferentes $i_1, i_2, \ldots, i_r$ se tiene

$$\left(u_{\frac{n}{p_{i_1}}}, u_{\frac{n}{p_{i_2}}}, \ldots, u_{\frac{n}{p_{i_r}}}\right) = u_{\left(\frac{n}{p_{i_1}}, \frac{n}{p_{i_2}}, \ldots, \frac{n}{p_{i_r}}\right)} = u_{\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_r}}} .$$

Por eso,

$$M = \frac{u_{\frac{n}{p_1}} u_{\frac{n}{p_2}} \ldots u_{\frac{n}{p_k}} u_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} \ldots}{u_{\frac{n}{p_1 p_2}} u_{\frac{n}{p_1 p_3}} \ldots u_{\frac{n}{p_{k-1} p_k}} u_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}} \ldots} .$$

Ahora bien, u_n es divisible por todos los números $u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, \ldots, u_{\frac{n}{p_k}}$; luego, también es divisible por el mínimo común múltiplo M de estos números:

$$u_n = Mt.$$

Todo divisor primo M divide uno de los números (2.35) y, por consiguiente, es un divisor impropio de u_n de modo que todos los divisores propios de u_n deben ser divisores de t. Del teorema demostrado en el punto 35 se deduce que, de todos los divisores primos impropios que tiene u_n, en la descomposición de t pueden figurar a lo sumo $p_1, p_2, \ldots, p_k$ con la particularidad de que cada uno de estos números aparece en t con el exponente 1 todo lo más, a excepción del número 2 que puede aparecer con el exponente 2.

Por eso, la existencia de divisores propios para el número de Fibonacci u_n quedará demostrada si se demuestra la desigualdad

$$t > 2p_1 p_2 \ldots p_k$$

(la cruz debajo del dos significa aquí, y también en lo que sigue, que este dos se toma en consideración sólo si uno de los números $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_k$ es igual a dos).

Demostremos, pues, que

$$t=\frac{u_n u_{\frac{n}{p_1p_2}} u_{\frac{n}{p_1p_3}} \ldots u_{\frac{n}{p_{k-1}p_k}} u_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}} \ldots}{u_{\frac{n}{p_1}} u_{\frac{n}{p_2}} \ldots u_{\frac{n}{p_k}} u_{\frac{n}{p_1p_2p_3}} \ldots} > \underset{\times}{2} p_1p_2 \ldots p_k.$$

En el punto 21 del § 1 hemos visto que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+\frac{1}{n}}.$$

Por lo tanto, la fracción anterior puede únicamente disminuir si todos los números de Fibonacci que figuran en su numerador se sustituyen por $\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-\frac{1}{n}}$ y todos los números de Fibonacci que figuran en su denominador se sustituyen por $\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+\frac{1}{n}}$. Luego, probando nuestra desigualdad para esta fracción nueva, demostraremos incluso más de lo que queremos. Realizando las sustituciones señaladas y dividiendo por $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^k}$, llegamos a la desigualdad

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_1p_2}-\frac{p_1p_2}{n}} \ldots \alpha^{\frac{n}{p_{k-1}p_k}-\frac{p_{k-1}p_k}{n}} \alpha^{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}-\frac{p_1p_2p_3p_4}{n}} \ldots}{\alpha^{\frac{n}{p_1}-\frac{p_1}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_2}-\frac{p_2}{n}} \ldots \alpha^{\frac{n}{p_k}-\frac{p_k}{n}} \alpha^{\frac{n}{p_1p_2p_3}-\frac{p_1p_2p_3}{n}} \ldots} > \underset{\times}{2} p_1p_2 \ldots p_k,$$

o sea,

$$\frac{\alpha^{n\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\ldots-\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_1p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{k-1}p_k}-\frac{1}{p_1p_2p_3}-\ldots\right)}}{\alpha^{\frac{1}{n}(1+p_1+p_2+\ldots+p_k+p_1p_2+\ldots+p_{k-1}p_k+p_1p_2p_3+\ldots)}} > \underset{\times}{2} p_1p_2 \ldots p_k,$$

es decir,

$$\alpha^{n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)-\frac{1}{n}(1+p_1)(1+p_2)\ldots(1+p_k)} >$$

$$> \underset{\times}{2} p_1p_2 \ldots p_k,$$

de donde, tomando logaritmos, obtenemos

$$n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)-$$
$$-\frac{1}{n}(1+p_1)(1+p_2)\dots(1+p_k)>\log_\alpha \underset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k.$$

Recordando la descomposición canónica del número n, podemos expresar esta desigualdad así

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\,p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\dots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)-$$
$$-\frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\,\frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\dots\frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}}>\log_\alpha \underset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k.$$

La expresión $p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\ \dots\ p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)$ suele indicarse por $\varphi(n)$. Se llama función de Euller. Posee muchas propiedades de importancia e interés.

Introduciendo la función de Euler, tenemos

$$\varphi(n)>\frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\,\frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\dots\frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}}+\log_\alpha \underset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k. \qquad (2.36)$$

Resta encontrar los números enteros positivos n que cumplen esta desigualdad. Diremos que tales números son «buenos» a diferencia de los «malos» que no satisfacen la desigualdad (2.36). Está claro que siendo n un número bueno, el número de Fibonacci u_n posee divisores propios. Subrayemos que la recíproca no tiene lugar: el cumplimiento de la desigualdad (2.36) es sólo una condición suficiente, pero no necesaria, para que u_n tenga divisores propios. Por eso, en el caso de números de Fibonacci de índice malo (habrá 10 números de este tipo) deberá comprobarse adicionalmente la existencia de divisores propios. Veremos que seis de estos números tienen divisores propios mientras que los cuatro restantes (indicados en el teorema) no los poseen.

«A simple vista» se observa que, al aumentar n, el primer miembro de (2.36) crece bastante más rápido que el segundo. Esto permite suponer desde el principio que la desigualdad (2.36) no se cumplirá sólo para pequeños valores de n. Pero con la tendencia común al crecimiento, ambos miembros de la desigualdad se comportan de manera muy irregular con el aumento de n, y difícilmente podrán aplicarse razonamientos inductivos directos a este caso. De aquí que sea natural el siguiente programa de acción. Ideamos un esquema de determinación sucesiva de todos los números naturales que permita pasar de un número bueno sólo a un número bueno; si la aplicación de este esquema conduce en alguno de los pasos sólo a números buenos, todos los números posteriores también serán buenos; en otras palabras, todos los números malos serán encontrados antes de ese paso. El lector podrá observar que este modo de razonar es también una variante del razonamiento inductivo.

Demostremos previamente tres proposiciones.

1. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ todos los números primos tomados en orden de crecimiento (o sea, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.). Si el número $n = p_1p_2 \ldots p_k$ es bueno y si $p_{k+1} > 3$, el número $p_1p_2 \ldots$ $\ldots p_kp_{k+1}$ es también bueno.

Efectivamente, en este caso tenemos

$$n = p_1p_2 \ldots p_k \text{ y}$$
$$\varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_k - 1);$$

según la hipótesis, es

$$(p_1-1)(p_1-1)\ldots(p_k-1) >$$
$$> \left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_k}\right) + \log_\alpha 2p_1p_2 \ldots p_k. \quad (2.37)$$

Para obtener la desigualdad correspondiente al producto $p_1p_2 \ldots p_kp_{k+1}$, debemos multiplicar el primer sumando del segundo miembro de (2.37) por $\left(1 + \frac{1}{p_{k+1}}\right)$, o sea, por un número menor que 2, y agregar al segundo sumando la magnitud $\log_\alpha p_{k+1}$. Pero el número $p_1p_2 \ldots p_k - 1$ es primo con cada uno de los números primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Por consiguiente, cualquier divisor primo suyo q es mayor que todos estos números y, por ende, no es menor que p_{k+1}. Es decir,

$$p_{k+1} < p_1p_2 \ldots p_k$$

y, con mayor razón,

$$p_{k+1} < 2p_1p_2 \ldots p_k,$$

de donde se deduce que

$$\log_\alpha p_{k+1} < \log_\alpha 2p_1p_2 \ldots p_k.$$

Queda claro así que agregando $\log_\alpha p_{k+1}$ al segundo sumando aumentamos su valor en menos de dos veces.

Por lo tanto, el segundo miembro aumenta en menos de dos veces. Por otro lado, el primer miembro queda multiplicado por $p_{k+1} - 1$, o sea, por un número mayor que 2. De (2.37) se deduce entonces la desigualdad

$$(p_1-1)\ldots(p_k-1)(p_{k+1}) > \left(1+\frac{1}{p_1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)\left(1+\frac{1}{p_{k+1}}\right) + \log_\alpha 2p_1 \ldots p_kp_{k+1}$$

como queríamos demostrar.

2. Sea $n = p_1p_2 \ldots p_k$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son números primos arbitrarios y distintos, un número bueno y sea q un número primo cualquiera diferente de $p_1, p_2, \ldots, p_k$ y mayor que p_1; entonces, el número $qp_2 \ldots p_k$ también es bueno.

Efectivamente, en este caso la desigualdad (2.36) de nuevo conduce a (2.37). Sustituir aquí p_1 por q es tanto como multiplicar el primer miembro de (2.37) por $\frac{q-1}{p_1-1}$ y el primer sumando del

segundo miembro por $\frac{1+\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p_1}}$ y agregar $\log_\alpha \frac{q}{p_1}$ al segundo sumando. Pero como $q > p_1$, esto conducirá sólo a la disminución del primer sumando.

Además $\frac{q}{p_1} > 1$, de donde $\frac{q-1}{p_1-1} > \frac{q}{p_1}$ y, por consiguiente,

$$\frac{q-1}{p_1-1} > \log_\alpha \frac{q}{p_1}.$$

El segundo miembro de (2.37) es mayor que 1 (aunque sólo sea porque todos los números primos, comenzando por el 2, son mayores que α^2). El primer miembro es también mayor que 1 por ser superior al segundo. Pero, si multiplicamos el primer miembro (mayor que 1) por un número mayor que 1 y, al mismo tiempo, agregamos al segundo miembro un número menor, la desigualdad (2.37) continuará siendo válida.

3. Si $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ es un número bueno, el número $p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ $\ldots p_k^{\alpha_k}$ es también bueno.

Para demostrarlo bastará observar que al sustituir en la desigualdad

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\, p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \ldots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1) >$$
$$> \frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}} \ldots \frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}} + \log_\alpha 2p_1p_2 \ldots p_k$$

el exponente α_1 por un número mayor $\alpha_1 + 1$, el primer miembro aumenta y el segundo disminuye. Es decir, por efecto de esta operación todo número bueno sólo puede convertirse en un número bueno.

Disponemos, pues, de tres operaciones con números, o de tres formas de pasar de un número a otro, con la particularidad de que estas operaciones convierten números buenos de nuevo en números buenos.

La primera operación conduce a la sucesión 1, 2, 6, 30, 210, . . .; la segunda permite en todo número, cuya descomposición canónica contiene sólo primeras potencias de números primos, sustituir cualquier divisor primo por otro mayor (para concretar, aceptemos que se escoge para esta sustitución el número primo más próximo «por exceso») que no figura en la descomposición canónica inicial; la tercera operación permite aumentar en 1 cualquier exponente de la descomposición canónica. Partiendo del 1, obtendremos por efecto de estas operaciones todos los números naturales. Salta a la vista que algunos números aparecerán más de una vez, pero esto no afectará nuestros razonamientos. Lo que importa es que todo número aparecerá al menos una vez.

Pasemos ahora a obtener todos los números naturales.

Comencemos con la primera operación.

El número 1 es malo, pues la desigualdad (2.36) da en este caso

$$1 > 1 + \log_\alpha \underset{\times}{2} = 1 + \log_\alpha 1 = 1$$

y, por lo tanto, no se cumple (igual que antes aceptamos que el producto de números naturales que contiene cero factores es igual a 1).

La primera operación aplicada al 1 conduce al 2. La desigualdad

$$1 > \frac{3}{2} + \log_\alpha \underset{\times}{2} = \frac{3}{2} + \log_\alpha 4$$

es incorrecta, o sea, el número 2 es también malo.

Los números siguientes, 6 y 30, también son malos, pues

$$\varphi(6) = 2 < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + \log_\alpha 12 = 2 + \log_\alpha 12 \text{ y}$$

$$\varphi(30) = 8 < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} + \log_\alpha 60 \cong 2{,}4 + 8{,}5.$$

Al contrario, el número $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ es bueno ya que

$$\varphi(210) = 48 > \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} + \log_\alpha 420 \cong 2{,}7 + 12{,}5.$$

Por eso, son buenos todos los números sucesivos resultantes de la primera operación.

Consideremos ahora la segunda y la tercera operaciones.

Aplicadas al número 2, dan 3 y 4, respectivamente, que son números malos:

$$\varphi(3) = 2 < \frac{4}{3} + \log_\alpha 3 \cong 1{,}3 + 2{,}3;$$

$$\varphi(4) = 2 < \frac{3}{2} + \log_n 4 \cong 1{,}5 + 2{,}9.$$

Para el número 3 estas operaciones dan 5 y 9, respectivamente; no ofrece dificultad comprobar que 5 es un número malo mientras que 9 es un número bueno de modo que las transformaciones sucesivas del 9 no tienen interés. Ahora, partiendo del número 5, podemos pasar por efecto de la segunda operación al número 7 y empleando la tercera operación al número 25. Ambos son buenos; por consiguiente, todos los números derivados de estos serán buenos y podemos no considerarlos.

La tercera operación aplicada al 4 conduce al número bueno 8 (la segunda operación no se puede emplear para el número 4).

Resumiendo, aplicando al 2 la segunda y la tercera operación tantas veces como se quiera, obtenemos tres números (3, 4 y 5) malos, siendo todos los demás buenos.

Pasemos al número 6. La segunda operación conduce al número malo 10 y, después, a los números buenos 20 y 15 y al número malo 14. Pero tras el número malo 14 van los números buenos 21 y 22 (segunda operación) y los números buenos 28 y 98 (tercera operación).

La tercera operación, aplicada al 6, conduce al número malo 12 y al número bueno 18. A partir del 12, obtenemos con la tercera opera-

ción los números buenos 24 y 36, mientras que la segunda operación no se puede aplicar al número 12, pues éste es divisible por el cuadrado del primo 2.

Finalmente, todos los números derivados del número 30 (210, 42 y 60, respectivamente) son buenos.

Podemos resumir nuestros razonamientos en un esquema (fig. 1).

Obtenemos así que los números malos son:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 14 \text{ y } 30.$$

Les corresponden los números de Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 55,\ 144,\ 377 \text{ y } u_{30}.$$

Es fácil ver que u_3, u_4, u_5, u_{10} y u_{14} poseen divisores propios (2, 3, 5, 11 y 29, respectivamente). Además, podríamos escribir todos los nú-

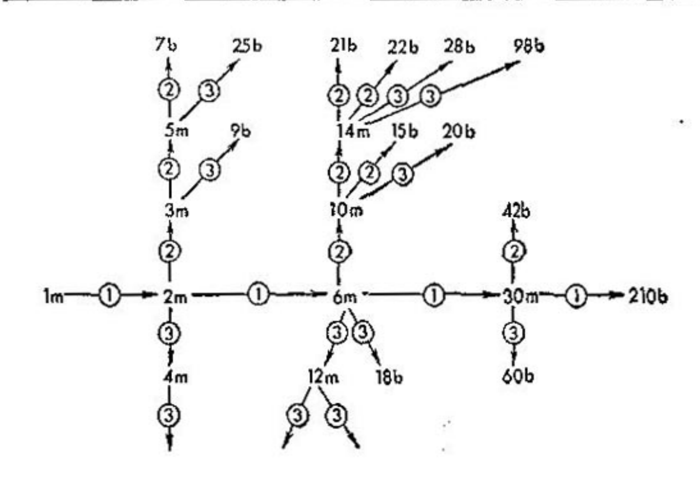


FIG. 1

meros de Fibonacci que preceden a u_{30}, descomponerlos en factores y comprobar de un modo directo que u_{30} posee divisor propio. Pero esto huelga: del teorema del punto 22 se deduce que u_{30} es divisible por 31 (ya que 31 es un número primo de tipo $5t + 1$); por otro lado, $u_6 = 9$, $u_{10} = 55$ y $u_{15} = 610$ no son divisibles por 31; luego, 31 es divisor propio de u_{30}.

Quedan los números $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_6 = 8$ y $u_{12} = 144$; salta a la vista que no tienen divisores propios.

Hemos demostrado el teorema.

37. «En contrapeso» a los cuatro números de Fibonacci que no tienen divisores propios, existen números de Fibonacci con varios

divisores propios; por ejemplo, los divisores 37 y 113 para u_{19}, los divisores 53 y 109 para u_{27}, etc. Se ignora si son muchos los números de Fibonacci con dos o más divisores propios.

Surge una pregunta natural: ¿cuál es el índice n del número de Fibonacci que tiene el primo p como divisor propio?

Del punto 25 se deduce que $n \leqslant p - 1$ si p es de tipo $5t \pm 1$ y que $n \leqslant p + 1$ si p es de tipo $5t \pm 2$. Pero hasta ahora se desconoce la fórmula que permita calcular directamente el número de Fibonacci con el divisor propio p.

En el punto 9 hemos demostrado que son compuestos todos los números de Fibonacci de índice compuesto, a excepción de u_4. La recíproca no tiene lugar: por ejemplo, $u_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. Cabe preguntarse si es finita o infinita la cantidad de los números de Fibonacci primos, o en otras palabras, si existe o no el mayor de los números de Fibonacci primos. Este problema sigue pendiente.

§ 3
NUMEROS DE FIBONACCI Y LAS FRACCIONES CONTINUAS

1. Consideremos la expresión

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}, \tag{3.1}$$

donde $q_1, q_2, \ldots, q_n$ son enteros *positivos* y q_0 es un entero *no negativo*; o sea, a diferencia de los números $q_1, q_2, \ldots, q_n$ el número q_0 puede ser igual a cero. Tendremos siempre en cuenta esta peculiaridad del número q_0 y, por ello, no la mencionaremos más.

La expresión (3.1) se denomina *fracción continua* y los números $q_0, q_1, \ldots, q_n$ son los *cocientes incompletos* de esta fracción.

Las fracciones continuas encuentran aplicación en las más diversas cuestiones matemáticas.

El proceso de conversión de un número en una fracción continua se denomina *desarrollo* de este número en fracción continua.

Veamos cómo se obtienen los cocientes incompletos de este desarrollo en el caso de una fracción corriente $\frac{a}{b}$.

Consideremos con este fin el algoritmo de Euclides aplicado a los números a y b:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\dots\dots\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_n. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

La primera igualdad da

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}.$$

Pero de la segunda igualdad de sistema (3.2) se deduce que

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

de modo que

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

De la tercera igualdad de (3.2) obtenemos

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

y, por eso,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}.$$

Salta a la vista que llevando este proceso hasta el fin (¡inducción!) llegaremos a la igualdad

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}.$$

En virtud del algoritmo de Euclides se tiene $q_n > 1$. (Si fuese $q_n = 1$, resultaría r_{n-1} igual a r_n, r_{n-2} sería divisible por r_{n-1} y el algoritmo de Euclides se hubiera interrumpido en el paso anterior.) Por eso, podemos en lugar de q_n considerar la expresión $(q_n - 1) + \frac{1}{1}$, o sea, aceptar que $q_n - 1$ es el penúltimo y 1, el último cocientes incompletos. Esta observación será útil en adelante.

2. Hemos visto que toda fracción racional $\frac{a}{b}$ puede ser desarrollada en una continua. Demostremos ahora que este desarrollo es único, o sea, que son iguales los cocientes incompletos correspondientes de dos fracciones continuas iguales.

Tomemos con este fin dos fracciones continuas ω y ω'. Sean $q_0, q_1, q_2, \ldots$ y q_0', q_1', q_2' sus cocientes incompletos respectivos. Probemos que la igualdad $\omega = \omega'$ implica las igualdades $q_0 = q_0'$, $q_1 = q_1'$, $q_2 = q_2'$, etc. En efecto, q_0 es la parte entera del número ω y q_0' es la parte entera del número ω'; por eso, $q_0 = q_0'$. Ahora bien, podemos representar las fracciones continuas ω y ω' en la forma

$$q_0+\frac{1}{\omega_1} \quad \text{y} \quad q_0'+\frac{1}{\omega_1'},$$

donde ω_1 y ω_1' también son fracciones continuas. Puesto que $\omega = \omega'$ y $q_0 = q_0'$, tenemos $\omega_1 = \omega_1'$. Pero en tal caso son iguales las partes enteras de los números ω_1 y ω_1', o sea, q_1 y q_1'. Continuando estos razonamientos (¡inducción!), nos persuadimos de que $q_2 = q_2'$, $q_3 = q_3'$, etc.

3. Sea

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{\ddots}{\quad + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{3.3}$$

una fracción continua. Consideremos los números

$$q_0,\ q_0 + \frac{1}{q_1},\quad q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}},\ \ldots$$

Estos números expresados mediante fracciones irreducibles corrientes

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1},$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \omega,$$

se denominan *reducidas* de la fracción continua ω. Nótese que $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ se obtiene de $\frac{P_k}{Q_k}$ sustituyendo el último cociente incompleto de esta reducida, o sea, q_k, por $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.

4. En la teoría de las fracciones continuas desempeña un papel importante el lema que sigue.

Lema. *Para toda fracción continua* (3.3) *se cumplen las relaciones*

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}, \tag{3.4}$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}, \tag{3.5}$$

$$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k. \tag{3.6}$$

Demostraremos estas igualdades simultáneamente empleando la inducción según k.

Demostrémoslas primero para $k = 1$. Tenemos:

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}.$$

Puesto que los números $q_0 b_1 + 1$ y q_1 son primos entre sí, la fracción $\frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$ es irreducible; al mismo tiempo, la fracción $\frac{P_1}{Q_1}$ es irreducible por definición. Pero los numeradores y los denominadores de dos fracciones irreducibles iguales son iguales. Es decir, $P_1 = q_0 q_1 + 1$ y $Q_1 = q_1$.

Tenemos, después,

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_0 (q_1 q_2 + 1) + q_2}{q_1 q_2 + 1}. \tag{3.7}$$

Según el punto 10 del § 2, el máximo común divisor de los números $q_0 (q_1 q_2 + 1) + q_2$ y $q_1 q_2 + 1$ es igual a $(q_2, q_1 q_2 + 1)$ y, por esta misma razón, es igual a $(q_2, 1)$, o sea, al 1. Por lo tanto, la fracción que figura en el último miembro de (3.7) es irreducible de modo que

$$P_2 = q_0 (q_1 q_2 + 1) + q_2 = (q_0 q_1 + 1) q_2 + q_0 = \\ = P_1 q_2 + P_0$$

y

$$Q_2 = q_1 q_2 + 1 = Q_1 q_2 + Q_0.$$

La igualdad

$$P_2 Q_1 - P_1 Q_2 = (-1)^1$$

se comprueba fácilmente.

Con esto queda demostrada la base de la inducción.

Supongamos ahora que son válidas las igualdades (3.4), (3.5) y (3.6) y consideremos la reducida

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_k q_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}}.$$

Hemos dicho ya que $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$ se obtiene de $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ sustituyendo en ésta q_{k+1} por $q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}$; puesto que q_{k+1} no figura en

las fórmulas para P_k, Q_k, P_{k-1} y Q_{k-1}, tenemos

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{P_k\left(q_{k+1}+\dfrac{1}{q_{k+2}}\right)+P_{k-1}}{Q_k\left(q_{k+1}+\dfrac{1}{q_{k+2}}\right)+Q_{k-1}}$$

o, recordando las hipótesis inductivas (3.4) y (3.5),

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{P_{k+1}q_{k+2}+P_k}{Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k}. \tag{3.8}$$

Demostremos que es irreducible la fracción que aparece en el segundo miembro de (3.8). Para ello basta probar que su numerador y su denominador son primos entre sí.

Supongamos que los números $P_{k+1}q_{k+2}+P_k$ y $Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k$ poseen un divisor común $d>1$. En este caso, la expresión

$$(P_{k+1}q_{k+2}+P_k)\,Q_{k+1}-(Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k)\,P_{k+1}$$

también será divisible por d. Pero, según la hipótesis inductiva (3.6), esta expresión es igual a $(-1)^{k+1}$ y d no puede dividirla.

Por lo tanto, el segundo miembro de (3.8) es irreducible de modo que (3.8) es una igualdad entre dos fracciones irreducibles. Luego,

$$P_{k+2}=P_{k+1}q_{k+2}+P_k \text{ y } Q_{k+2}=Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k.$$

Para concluir la demostración del paso inductivo resta demostrar que

$$P_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=(-1)^{k+1}. \tag{3.9}$$

Pero de los resultados ya obtenidos se deduce que

$$P_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=$$
$$=P_{k+1}q_{k+2}q_{k+1}+P_kQ_{k+1}-P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_k$$

y (3.9) se desprende directamente de la hipótesis inductiva (3.6). Con esto concluye la demostración del paso inductivo y, por ende, del lema.

Corolario.

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}. \tag{3.10}$$

La **demostración** es evidente.

Puesto que los cocientes incompletos de las fracciones continuas son enteros positivos, del lema demostrado se deduce que

$$P_0 < P_1 < P_2 < \ldots, \qquad (3.11)$$
$$Q_0 < Q_1 < Q_2 < \ldots$$

Más adelante precisaremos esta sencilla pero importante observación.

5. Apliquemos ahora el lema del punto 4 para describir todas las fracciones continuas cuyos cocientes incompletos son iguales a 1. Para estas fracciones se cumple el siguiente teorema importante.

Teorema. *Si una fracción incompleta tiene n cocientes incompletos, todos iguales a 1, esta fracción es igual a* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Demostración. Sea α_n la fracción continua de n cocientes incompletos iguales a 1. Salta a la vista que

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

son las sucesivas reducidas de la fracción α_n.

Sea

$$\alpha_h = \frac{P_h}{Q_h}.$$

Puesto que

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{1} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

debe ser $P_1 = 1$ y $P_2 = 2$. Además, $P_{n+1} = P_n q_{n+1} + P_{n-1} = P_n + P_{n+1}$. Por eso (véase el punto 6 del § 1), $P_n = u_{n+1}$.

Análogamente tenemos: $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$ y $Q_{n+1} = Q_n q_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n-1}$ de modo que $Q_n = u_n$. Por consiguiente,

$$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}. \qquad (3.12)$$

Compare el lector este resultado con las fórmulas (1.10) y (3.6).

6. Sean

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}} \quad \text{y} \quad \omega' = q_0' + \cfrac{1}{q_1' + \cfrac{1}{q_2' + \ldots}}$$

dos fracciones continuas con la particularidad de que

$$q'_0 \geqslant q_0, \quad q'_1 \geqslant q_1, \quad q'_2 \geqslant q_2, \ \ldots \tag{3.13}$$

Indiquemos por

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \ \ldots$$

las reducidas de la fracción ω y por

$$\frac{P'_0}{Q'_0}, \quad \frac{P'_1}{Q'_1}, \quad \frac{P'_2}{Q'_2}, \ \ldots$$

las reducidas de la fracción ω'.

Salta a la vista, de los resultados del lema del punto 4 y de (3.13), que

$$P'_0 \geqslant P_0, \quad P'_1 \geqslant P_1, \quad P'_2 \geqslant P_2, \ \ldots$$

y que

$$Q'_0 \geqslant Q_0, \quad Q'_1 \geqslant Q_1, \quad Q'_2 \geqslant Q_2, \ \ldots$$

Está claro que el valor mínimo de cualquier cociente incompleto es 1. Por eso, si todos los cocientes incompletos de una fracción continua son iguales a 1, los numeradores y los denominadores de sus reducidas crecen menos rápido que los numeradores y los denominadores de las reducidas de cualquier otra fracción continua.

Estimemos esta diferencia en el crecimiento. Es evidente que, después de las fracciones continuas de cocientes incompletos iguales a 1, el crecimiento menos rápido de los numeradores y de los denominadores se da en la fracción continua que tiene todos los cocientes incompletos iguales a 1, a excepción de uno, igual a 2. El lema que viene a continuación permite ver que estas fracciones continuas también están ligadas a los números de Fibonacci.

Lema. *Si los números $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$ son los cocientes incompletos de una fracción continua ω y*

$$q_0 = q_1 = q_2 = \ldots = q_{i-1} = q_{i+1} = \ldots = q_n = 1,$$
$$q_i = 2 \quad (i \neq 0),$$

se tiene

$$\omega = \frac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}.$$

Demostración. Apliquemos la inducción según i. Si $i = 1$, para todo n tenemos

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{1}}}$$

$n-1$ cocientes incompletos

o, según el punto anterior,

$$\omega=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha_{n-1}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{u_{n-1}}{u_n}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{2u_n+u_{n-1}}{u_n}}=$$

$$=1+\frac{u_n}{u_{n+2}}=\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+2}}$$

y, tomando convencionalmente $u_0=0$, obtenemos

$$\omega=\frac{u_2u_{n+2}+u_1u_n}{u_1u_{n+2}+u_0u_n}\,.$$

Hemos demostrado la base de la inducción.
Supongamos ahora que para todo n se tiene

$$\left.\begin{array}{r} i \text{ cocientes} \\ \text{incompletos} \end{array}\right\{\; 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{}{\ddots+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha_{n-i}}}}}=$$

$$=\frac{u_{i+1}u_{n-i+3}+u_iu_{n-i+1}}{u_iu_{n-i+3}+u_{i-1}u_{n-i+1}}\,. \tag{3.14}$$

Tomemos la fracción continua

$$\left.\begin{array}{r} i+1 \text{ cocientes} \\ \text{incompletos} \end{array}\right\{\; 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{}{\ddots+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha_{n-i-1}}}}}$$

que también se puede escribir así

$$1+\cfrac{1}{\cdots\; \left.\begin{array}{r} i \text{ cocientes} \\ \text{incompletos} \end{array}\right\{\; 1+\cfrac{}{\ddots+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha_{n-i-1}}}}}\,. \tag{3.15}$$

En virtud de (3.14), la fracción continua que aparece en (3.15) por debajo de la línea de puntos es igual a

$$\frac{u_{i+1}u_{n-i+3}+u_i u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2}+u_{i-1}u_{n-i}}.$$

Por consiguiente, toda la fracción (23.15) es igual a

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_i u_{n-i}}{u_i u_{n-i+2}+u_{i-1}u_{n-i}}}=\frac{(u_i+u_{i+1})\,u_{n-i+2}+(u_{i-1}+u_i)\,u_{n-i}}{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_i u_{n-i}}=$$

$$=\frac{u_{i+2}u_{n-i+2}+u_{i+1}u_{n-i}}{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_i u_{n-i}}.$$

Con esto queda demostrado el paso inductivo y todo el lema.

Corolario. Sea ω una fracción continua que tiene no menos de n cocientes incompletos, no todos iguales a 1, y sea $q_0 \neq 0$; representando ω como una fracción corriente $\frac{P}{Q}$, tendremos entonces

$$P \geqslant u_{i+1}u_{n-i+3}+u_i u_{n-i+1} > u_{i+1}u_{n-i+2}+u_i u_{n-i+1}=u_{n+2}$$

y, por analogía,

$$Q > u_{n+1}.$$

El lema del punto 4 desempeña aquí, desde luego, un papel primordial, pues debido a él obtenemos sólo fracciones irreducibles al conventir una fracción continua en una corriente y esto excluye la posibilidad de que los numeradores y los denominadores disminuyan por efecto de la simplificación.

7. El resultado del punto anterior permite obtener el siguiente teorema que revela la posición especial de los números de Fibonacci en cuanto al algoritmo de Euclides.

Teorema. *Apliquemos el algoritmo de Euclides a los números a y b; si $b = u_n$, existe un valor de a tal que el número de pasos que requiere el algoritmo será $n-1$; si $b < u_n$, este número de pasos será menor que $n-1$ cualquiera que sea a.*

Demostración. La primera parte del teorema es elemental. Basta tomar a igual al número de Fibonacci que va directamente después de b, o sea, u_{n+1}. En este caso tenemos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha_n.$$

Puesto que la fracción continua α_n tiene n cocientes incompletos, el número de pasos en el algoritmo de Euclides, aplicado a los números a y b, será $n-1$.

Demostremos la segunda parte del teorema. Supongamos, a despecho de lo afirmado, que el número de pasos es $n-1$ como mínimo. Desarrollemos $\frac{a}{b}$ en fracción continua ω. Salta a la vista que ω tendrá n cocientes incompletos como mínimo (uno más que el número de pasos en el algoritmo de Euclides). Puesto que b no es un número de Fibonacci, la fracción ω tendr cocientes incompletos distintos de 1;

por eso, debido al lema del punto 6, será $b > u_n$ lo que contradice la hipótesis del teorema.

Este teorema pone en evidencia que al aplicar el algoritmo de Euclides a dos números consecutivos de Fibonacci el proceso correspondiente será en cierto sentido el «más prolongado».

8. La expresión

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{q_n + \dots}}} \tag{3.16}$$

se denomina *fracción continua infinita*. Todas las definiciones y todos los resultados de los puntos anteriores pueden hacerse extensivos de un modo natural al caso de fracciones continuas infinitas.

Sea

$$\frac{P_0}{Q_0}, \ \frac{P_1}{Q_1}, \ \dots, \ \frac{P_n}{Q_n}, \ \dots \tag{3.17}$$

la sucesión (infinita, claro está) de las reducidas de la fracción (3.16). Demostremos que esta sucesión tiene límite.

Con este fin consideremos por separado las sucesiones

$$\frac{P_0}{Q_0}, \ \frac{P_2}{Q_2}, \ \dots, \ \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \ \dots \tag{3.18}$$

y

$$\frac{P_1}{Q_1}, \ \frac{P_3}{Q_3}, \ \dots, \ \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \ \dots \tag{3.19}$$

En virtud de (3.10) y (3.11), tenemos

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} =$$
$$= \frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} + \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}} > 0,$$

es decir, la sucesión (3.18) es creciente. Igualmente, de

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}} - \frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} < 0$$

se deduce que la sucesión (3.19) es decreciente.

Todo término de la sucesión (3.19) es mayor que cualquier término de la sucesión (3.18). Efectivamente, conside-

remos los números

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \quad \text{y} \quad \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

y tomemos un número impar k mayor que $2n$ y también que $2m+1$. De (3.10) se desprende que

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\,; \tag{3.20}$$

además, puesto que (3.18) es creciente y (3.19) es decreciente, tenemos

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \tag{3.21}$$

$$\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}\,. \tag{3.22}$$

Comparando las expresiones (3.20), (3.21) y (3.22), encontramos

$$\frac{P_{2m}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}\,.$$

Según (3.10) y (3.11), tenemos

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_{n+1}P_n} < \frac{1}{n^2}$$

y, por eso, con el aumento de n el valor absoluto de la diferencia entre la $(n+1)$-ésima y la n-ésima reducidas tiende a cero.

De todo lo dicho podemos concluir que las sucesiones (3.18) y (3.19) tienen el mismo límite que también, claro está, es límite de (3.17). Este límite se denomina *valor de la fracción continua infinita* (3.16).

En el punto 2 hemos demostrado la unicidad del desarrollo de un número racional en fracción continua. Ya que aquellos razonamientos no se basaban de modo alguno en el carácter finito de las fracciones continuas consideradas, quedó así demostrado que todo número real (y no sólo racional) es valor de una sóla fracción continua.

Puesto que todo número racional se desarolla siempre en fracción continua finita, de lo expuesto se deduce que no puede ser desarrollado en una fracción continua infinita, o sea, el valor de una fracción continua infinita es necesariamente un número irracional.

La teoría de desarrollo de los números irracionales en fracciones continuas constituye una rama enjundiosa e interesante de la Teoría de los números. Sin detenernos especialmente en estas cuestiones veamos un ejemplo relacionado con los números de Fibonacci.

9. Determinemos el valor de la fracción continua infinita

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}} \qquad (3.23)$$

Sabemos ya que este valor es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, donde $\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Calculemos este límite.

En el punto 20 del § 1 hemos visto que u_n es el entero más próximo a $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, o sea, para todo n se tiene

$$u_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n,$$

donde $|\theta_n| < \frac{1}{2}$.

Por eso, recordando lo demostrado en el punto 5, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}.$$

Pero $\theta_{n+1}\sqrt{5}$ es una magnitud acotada (su valor absoluto es menor que 2) y α^n crece indefinidamente cuando n tiende al infinito (porque $\alpha > 1$). Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0.$$

Por estas mismas razones

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

El valor de la fracción continua (3.23) se puede determinar sin recurrir a la fórmula de Binet ni a los límites. (En cierto modo nos «basta» con que el razonamiento inductivo del punto 2 es válido tanto para las fracciones continuas finitas como para los límites de éstas, las fracciones infinitas.)

Representemos con este fin la fracción (3.23) en la forma

$$1+\frac{1}{x}.$$

La expresión x es de nuevo la fracción continua (3.23) de modo que

$$x=1+\frac{1}{x},$$

o sea,

$$x^2-x-1=0 \qquad (3.24)$$

y

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Puesto que el valor de la fracción (3.23) es un número no negativo, debe ser igual a la raíz positiva de la ecuación (3.24), o sea, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que es precisamente α.

De aquí se deduce que el cociente de dos números de Fibonacci consecutivos se aproxima a α con el aumento del índice. Podemos emplear esto para calcular aproximadamente el valor de α (compárese con el cálculo de u_n realizado en el punto 20 del § 1 y también con la fórmula (1.35)). El error resulta pequeño incluso tomando números de Fibonacci de índice no muy grande. Por ejemplo (redondeando la quinta cifra),

$$\frac{u_{10}}{u_9}=\frac{55}{34}=1,6176$$

mientras que $\alpha=1,6180$, o sea, el error, como vemos, no pasa de 0,1%.

Señalemos de paso que respecto al error que se comete aproximando un número irracional por medio de las reducidas y del desarrollo en fracción continua, el número α ocupa una posición especial: cualquier otro número se aproxima por sus reducidas mejor, en cierto sentido, que α. Sin embargo, no nos detendremos en esta cuestión a pesar de su interés.

§ 4
NUMEROS DE FIBONACCI Y LA GEOMETRIA

1. Dividamos el segmento AB de longitud 1 en dos partes (fig. 2) de modo que la mayor sea la media geométrica entre la menor y todo el segmento.

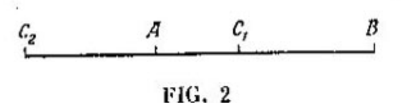


FIG. 2

Sea x la longitud de la parte mayor del segmento. La longitud de la parte menor será, naturalmente, $1 - x$ y nuestro problema se reduce a la proporción

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}, \tag{4.1}$$

de donde

$$x^2 = 1 - x. \tag{4.2}$$

La raíz positiva de (4.2) es $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ de modo que cada una de las razones de la proporción (4.1) es igual a

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha.$$

Esta división del segmento en dos partes (mediante el punto C_1) se denomina *división en razón media y extrema* o también *división en justa proporción.*

Si tomamos la raíz negativa de la ecuación (4.2), el punto correspondiente C_2 quedará fuera del segmento AB (en la Geometría se dice entonces que la división es externa) como puede verse en la fig. 2. Salta a la vista que también en este caso tropezamos con la justa proporción

$$\frac{C_2B}{AB}=\frac{AB}{C_2A}=\alpha.$$

2. No ofrece dificultad alguna la construcción del punto de la justa proporción.

Sea $AB = 1$; levantando desde el punto A la perpendicular y escogiendo el punto E de modo que $AE = \frac{1}{2}$ (fig. 3), tendremos

$$EB = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Trazando por A con centro en E el arco de circunferencia hasta intersecar EB en el punto D, tendremos

$$BD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Por último, trazando por D el arco de circunferencia con centro en B, obtenemos el punto buscado C_1. El punto

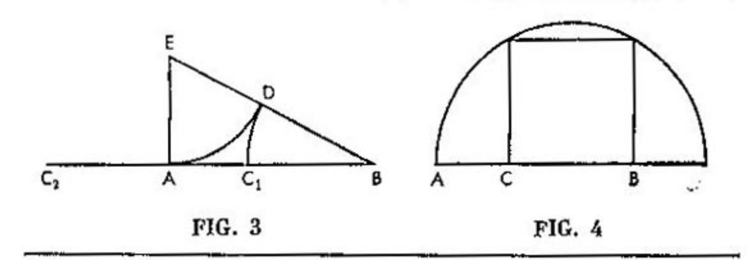


FIG. 3 FIG. 4

C_2 de la división externa se determina por la condición $AC_2 = BC_1$.

3. En la Geometría tropezamos frecuentemente con la justa proporción. Por ejemplo, si tomamos un cuadrado inscrito en un semicírculo (fig. 4), C es el punto de justa proporción en el segmento AB.

El lado a_{10} de un decágono regular (fig. 5) inscrito en una circunferencia de radio R es igual, como se sabe, a

$$2R \operatorname{sen} \frac{360°}{2 \cdot 10°},$$

o sea, es igual a $2R$ sen 18°.

Calculemos el valor de sen 18°. En virtud de las fórmulas de la Trigonometría, tenemos

$$\operatorname{sen} 36° = 2 \operatorname{sen} 18° \cos 18° \quad \text{y}$$
$$\cos 36° = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 18°.$$

de modo que

$$\text{sen } 72^\circ = 4 \text{ sen } 18^\circ \cos 18^\circ (1-2 \text{ sen}^2 18^\circ). \qquad (4.3)$$

Puesto que $\text{sen } 72^\circ = \cos 18^\circ \neq 0$, de (4.3) se deduce

$$1 = 4 \text{ sen } 18^\circ (1-2 \text{ sen}^2 18^\circ),$$

o sea, sen 18° es una de las raíces de la ecuación

$$1 = 4x(1-2x^2) \text{ ó } 8x^3 - 4x + 1 = 0.$$

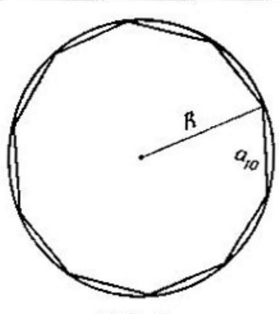


FIG. 5

Descomponiendo en factores el primer miembro de la última ecuación, obtenemos

$$(2x-1)(4x^2+2x-1)=0,$$

de donde

$$x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{y} \quad x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Puesto que sen 18° es un número positivo distinto de $\frac{1}{2}$,

$$\text{sen } 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2\alpha}.$$

Fijémosnos también en que

$$\cos 36^\circ=1-2 \text{ sen}^2 18^\circ=1-2\frac{1}{4\alpha^2}=1-\frac{1}{2\alpha^2}=$$

$$=\frac{2\alpha^2-1}{2\alpha^2}=\frac{2+2\alpha-1}{2\alpha^2}=\frac{2\alpha+1}{2\alpha^2}=\frac{\alpha^3}{2\alpha^2}=\frac{\alpha}{2}.$$

Por lo tanto,

$$a_{10}=2R\frac{\sqrt{5}-1}{4}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{R}{\alpha}.$$

En otras palabras, a_{10} es la parte mayor del radio del círculo dividido en justa proporción.

Para calcular a_{10} podemos, en la práctica, sustituir α por el cociente de dos números de Fibonacci consecutivos (punto 20 del § 1 o punto 8 del § 3) y tomar a_{10} igual aproximadamente a $\frac{8}{13}R$, o, incluso, a $\frac{5}{8}R$.

4. Consideremos el pentágono regular. Sus diagonales forman un pentágono regular estrellado (fig. 6).

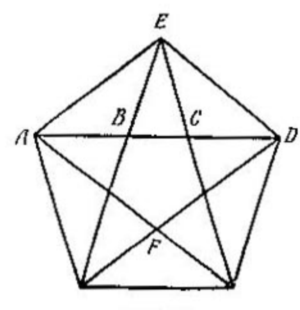


FIG. 6

Puesto que los ángulos AFD y ADF son iguales a 108° y 36°, respectivamente, tenemos por el teorema de los senos

$$\frac{AD}{AF}=\frac{\operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ}=\frac{\operatorname{sen} 72^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ}=2\cos 36^\circ=2\,\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\alpha.$$

Pero como $AF = AC$, debe ser

$$\frac{AD}{AF}=\frac{AD}{AC}=\alpha$$

y C es el punto de justa proporción en el segmento AD.

Por definición de justa proporción tenemos

$$\frac{AC}{CD}=\alpha.$$

Observando que $AB = CD$, encontramos

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BC}=\alpha.$$

Es decir, cada uno de los segmentos

$$BC,\ AB,\ AC \text{ y } AD$$

es α veces mayor que el anterior.

El lector podrá probar que también

$$\frac{AD}{AE}=\alpha.$$

5. Tomando un rectángulo de dimensiones a y b, inscribamos en él cuadrados del área mayor posible (como muestra la fig. 7).

Siendo a y b números enteros, de las explicaciones dadas en el punto 5 del § 2 se deduce que este proceso corresponde

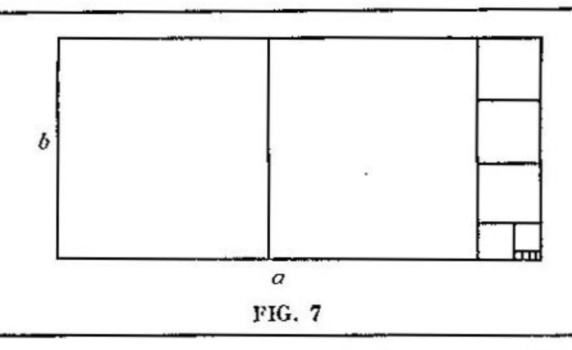


FIG. 7

al algoritmo de Euclides aplicado a los números a y b con la particularidad de que el número de cuadrados de igual dimensión coincide (punto 1 del § 3) con los cocientes incompletos respectivos del desarrollo de $\frac{a}{b}$ en fracción continua.

Si dividimos de este modo un rectángulo cuyos lados forman la misma razón que dos números de Fibonacci consecutivos (fig. 8), podemos afirmar, basándonos en el punto 4 del § 3, que todos los cuadrados, a excepción de los dos menores, serán distintos.

Puesto que las dimensiones de estos cuadrados son, respectivamente, u_1, u_2, . . ., u_n, la suma de sus áreas es

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2.$$

Al mismo tiempo, esta suma es el área del rectángulo considerado, igual a $u_n u_{n+1}$.

Es decir, para todo n

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_n u_{n+1}$$

y hemos encontrado una demostración nueva, esta vez geométrica, de la proposición del punto 4 del § 1.

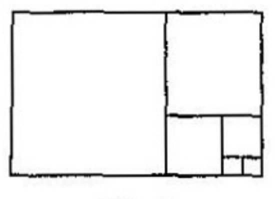


FIG. 8

6. Supongamos ahora que la razón de las dimensiones del rectángulo es α (abreviando diremos en este caso que se tiene un rectángulo de justa proporción). Inscribamos en un

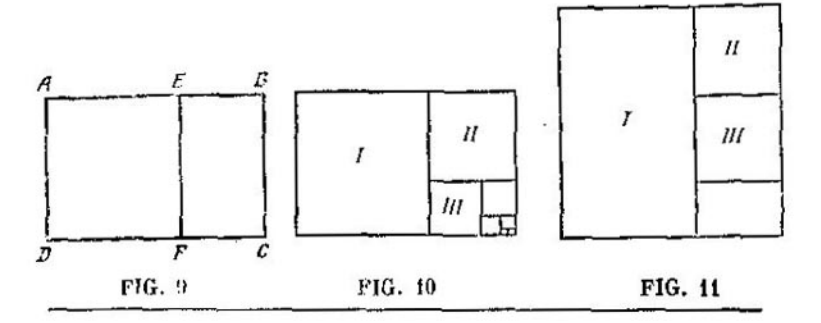


FIG. 9 FIG. 10 FIG. 11

rectángulo de justa proporción el cuadrado de mayor dimensión posible (fig. 9) y demostremos que de esta forma se obtiene de nuevo un rectángulo de justa proporción.

En efecto,

$$\frac{AB}{AD}=\alpha.$$

Por hipótesis $AD = AE = EF$ ya que ***AEFD*** es un cuadrado. Luego,

$$\frac{EF}{EB}=\frac{AB-EB}{EB}=\alpha^2-1.$$

Pero $\alpha^2 - 1 = \alpha$ de modo que

$$\frac{EF}{EB} = \alpha.$$

En la fig. 10 puede verse como un rectángulo de justa proporción es agotado «casi todo él» por los cuadrados *I*, *II*, *III*, . . . con la particularidad de que, después de inscribir cada cuadrado, queda siempre un rectángulo de justa proporción.

Compare el lector estos razonamientos con los de los puntos 4 y 8 del parágrafo anterior.

Nótese que inscribiendo en un cuadrado (fig. 11) el rectángulo de justa proporción *I* y los cuadrados *II* y *III*, se obtiene de nuevo un rectángulo de justa proporción. La demostración queda al albedrío del lector.

7. En la naturaleza encontramos numerosos ejemplos de ordenación de elementos homogéneos relacionada con los números de Fibonacci.

Observando algunos elementos de las plantas se puede ver que forman, a menudo, dos familias de espirales: una siguiendo la dirección de las manecillas del reloj y otra en dirección contraria. El número de espirales de una y otra clase son, frecuentemente, dos números de Fibonacci consecutivos.

Por ejemplo, tomando una rama joven de pino, podemos observar que las pinochas forman dos espirales que van desde abajo hacia arriba de derecha a izquierda; al mismo tiempo, forman tres espirales que van desde abajo hacia arriba de izquierda a derecha.

Las semillas de muchas piñas forman tres espirales que suben en pendiente suave y, al mismo tiempo, cinco espirales de pendiente mayor en dirección opuesta. En piñas de gran tamaño se pueden encontrar 5 y 8 e, incluso, 8 y 13 espirales. También se observan claramente en el ananás en número de 8 y 13.

En muchas compuestas (por ejemplo, la margarita y la manzanilla) se ven claramente las espirales formadas por las cabezuelas en la inflorescencia. En estos casos el número de espirales suele ser 13 en una dirección y 21 en otra e, incluso, 21 y 34, respectivamente. Un gran número de espirales forman las semillas del girasol; puede llegar a 55 y 89 en cada dirección.

8. Los rectángulos de justa proporción son armónicos. Los objetos de esta forma son de cómodo manejo. Por eso, muchos objetos usuales (libros, cajas de fósforos, maletas, etc.) se elaboran en esta forma.

En la antigüedad y en la Edad Media, distintos filósofos idealistas convertían la belleza de los rectángulos de justa proporción y de otras figuras en un principio estético

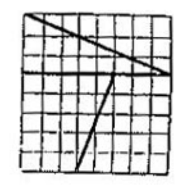


FIG. 12

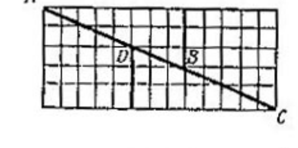


FIG. 13

e, incluso, filosófico. Mediante la justa proporción y otras relaciones numéricas, se intentaba explicar, y no sólo describir, los fenómenos de la naturaleza e, incluso, de la vida social; al mismo tiempo, el número α y sus reducidas se sometían a operaciones místicas. Claro que semejantes «teorías» nada tienen que ver con la ciencia.

9. Terminemos nuestra exposición con un ejemplo geométrico curioso. Ahora «demostraremos» que $64=65$. Tomemos para ello un cuadrado de dimensión 8 y cortémoslo en cuatro partes como muestra la fig. 12 formando con éstas un rectángulo (fig. 13) de lados 13 y 5, o sea, de área 65.

Es fácil de explicar este aparente enigma: los puntos A, B, C y D de la fig. 13 no se hallan, de hecho, en una misma recta siendo vértices de un paralelogramo cuya área es igual precisamente a la unidad de área «desaparecida».

Esta «demostración» incorrecta pero verosímil de una proposición falsa (o sofisma) se hace todavía más «evidente» y «suasoria» si en lugar del cuadrado de dimensión 8 se toma un cuadrado de dimensión igual a un número de Fibonacci u_{2n} de índice par suficientemente grande. Dividamos este cuadrado en partes (fig. 14) y formemos con éstas un rectángulo (fig. 15). «El vacío» en forma de un paralelogramo estirado a lo largo de la diagonal es de área 1, en virtud del

punto 9 del § 1. La anchura máxima de esta rendija (o sea, la altura del paralelogramo) se calcula fácilmente siendo igual a

$$\frac{1}{\sqrt{u_{2n}^2+u_{2n-2}^2}}.$$

Por lo tanto, tomando un cuadrado de dimensión 21 cm y «convirtiéndolo» en el rectángulo de dimensiones 34 cm

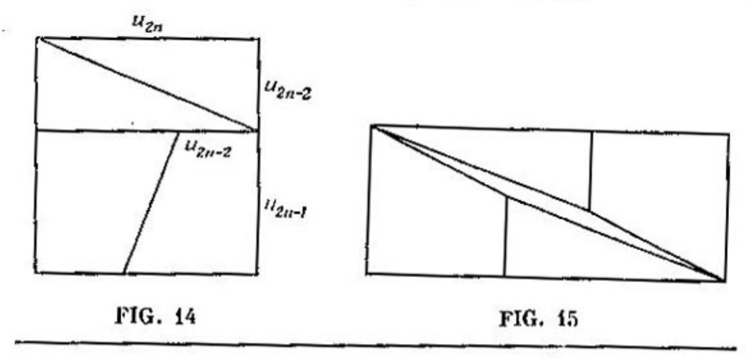


FIG. 14 FIG. 15

y 13 cm, obtenemos $\frac{1}{\sqrt{21^2+8^2}}$ cm, o sea, 0,4 mm aproximadamente, como anchura máxima de la rendija, entidad que escapa a la vista humana.

§ 5
NUMEROS DE FIBONACCI Y LA TEORIA DE LA BUSQUEDA

1. Sabido es que, a pequeña velocidad, el automóvil gasta relativamente mucho combustible por kilómetro. El consumo también es considerable en las grandes velocidades. Hay una velocidad intermedia «óptima» con un consumo mínimo de combustible por kilómetro. Por eso, es de suponer que la relación entre el consumo de combustible por kilómetro y la velocidad del automóvil tiene aproximadamente la forma representada en la fig. 16: con el aumento de la velocidad el consumo de combustible por kilómetro primero decrece, llegando a un nivel mínimo, y después crece constantemente (monótonamente en términos matemáticos).

Aun cuando los rasgos principales del gráfico de esta relación (descendiente primero y ascendiente después) son los mismos para casi todos los automóviles, su forma concreta puede variar incluso para automóviles de un mismo tipo según sus peculiaridades individuales, el grado de desgaste de unos u otros mecanismos, etc. En particular, el mínimo del gráfico también puede variar considerablemente.

Supongamos ahora que disponemos de un automóvil y queremos realizar un viaje por lugares donde no existe abas-

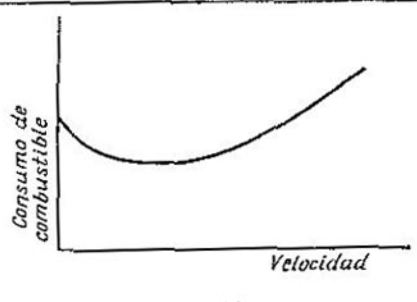


FIG. 16

tecimiento de combustible. Para recorrer el trayecto de longitud máxima, tendremos que conocer con bastante exactitud la velocidad que corresponde al consumo mínimo de combustible. Esta velocidad suele llamarse *velocidad más económica.*

Lo natural es determinarla experimentalmente recorriendo a distintas velocidades trayectos de un kilómetro en condiciones próximas al viaje y determinando cada vez el consumo de gasolina. Puesto que estos experimentos poco tienen de entretenido, es natural preguntarse: ¿cuántos experimentos bastará realizar para conocer con cierta exactitud la velocidad más económica? ¿a qué velocidades habrá que determinar en estos experimentos el consumo de combustible? Estrechamente ligadas a estas preguntas surgen dos más: ¿cómo organizar los experimentos para determinar la velocidad más económica con la máxima exactitud? ¿cuál es esta exactitud máxima?

Cuando digamos que la velocidad más económica ha sido determinada *«con precisión de hasta un* ε *dado»* entenderemos

que se ha encontrado una velocidad v tal que el valor exacto de la velocidad más económica queda comprendido entre $v - \varepsilon$ y $v + \varepsilon$ (o sea, que la velocidad más económica ha sido determinada con un error que no pasa de ε).

Puntualizando, aceptaremos conocer de antemano los límites v' y v'' en los cuales está comprendida la velocidad más económica, siendo v' no mayor y v'' no menor que la

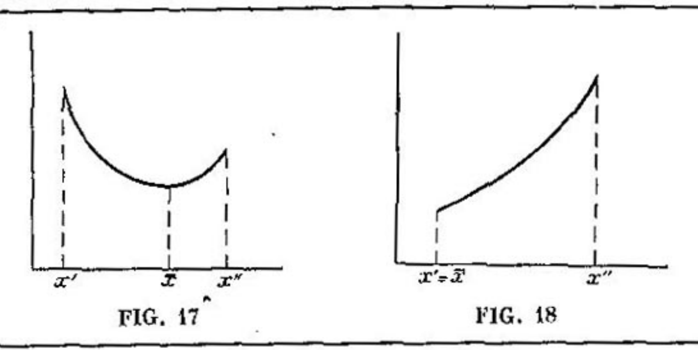


FIG. 17 FIG. 18

velocidad más económica. (Por ejemplo, podemos tomar como v' la velocidad mínima que garantiza el funcionamiento estable del motor y como v'', la velocidad máxima del automóvil.)

2. Abstrayéndonos de este ejemplo concreto, consideremos el siguiente problema matemático.

Supongamos que respecto a una función $f(x)$ se conoce que decrece a partir de un x' dado hasta un $\bar{x}$ desconocido y que crece a partir de ese $\bar{x}$ hasta un x'' dado (fig. 17). Puede darse, en particular, el caso en que el punto desconocido $\bar{x}$ coincida con uno de los extremos x' o x'' del segmento; entonces la función será solamente creciente (fig. 18) o solamente decreciente (fig. 19). Por supuesto, aunque se dé una de estas dos circunstancias, nosotros haremos abstracción de ello. En el punto $\bar{x}$ la función f toma su valor mínimo $f(\bar{x})$ que se denomina *valor mínimo*. Se dice entonces que el punto $\bar{x}$ *ofrece el mínimo* a la función y también que es *el punto de mínimo* de la función.

En adelante sólo consideraremos las funciones que primero decrecen y después crecen llamándolas, para abreviar, «*funciones de un mínimo*».

En este parágrafo nos proponemos analizar las posibilidades de la localización exacta del punto de mínimo de la función f (desde ahora f significará siempre una función de un mínimo aunque esto último no se mencione). Dejemos constancia de que *todo cuanto se diga sobre los mínimos de las funciones es cierto, salvo modificaciones pertinentes, también para los máximos.*

3. En el problema planteado, igual que en otros semejantes, intervienen tres factores: *los objetivos* que nos propone-

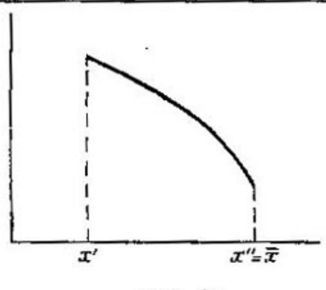


FIG. 19

mos, *las posibilidades* que tenemos para alcanzarlos y, por último, *las condiciones* en que debemos alcanzar los objetivos dentro de las posibilidades.

En nuestro caso el objetivo es elevar el grado de exactitud con la que se determina el punto de mínimo, o sea, reducir el error con que se define este punto.

En cuanto a las posibilidades, podemos encontrar con exactitud, de una u otra forma (cálculo, medición o, en último caso, hipótesis), algunos valores de la función f en varios puntos escogidos al azar y podemos también comparar estos valores.

Por último, las condiciones están determinadas por la dimensión del dominio de definición de f, o sea, por la longitud L del segmento que une los puntos x' y x''.

Según lo expuesto, todo problema concreto de búsqueda puede tener tres aspectos:

1) ¿En qué grado se puede alcanzar el objetivo dadas las posibilidades y las condiciones? En el caso que nos ocupa esto significa lo siguiente.

Supongamos que podemos realizar n cálculos sucesivos de la función f escogiendo los puntos correspondientes a nuestro parecer. ¿En qué puntos debemos calcular los valores de la función para poder localizar el punto $\bar{x}$ con la máxima exactitud y cuál es esta exactitud?

2) ¿De qué posibilidades debemos disponer para alcanzar nuestro objetivo dadas las condiciones?

En nuestro problema esta pregunta se puede concretar así. Supongamos que pretendemos determinar el punto de mínimo $\bar{x}$ de la función f con una exactitud ε dada, o sea, encontrar un punto x tal que $\bar{x}$ quede comprendido entre $x - \varepsilon$ y $x + \varepsilon$. ¿Cuántos cálculos de f serán necesarios y en qué orden?

3) ¿Qué condiciones serán suficientes para alcanzar el objetivo dadas las posibilidades?

Ahora se trata de conocer el máximo intervalo L de variación de f (o sea, el valor máximo de la diferencia $x'' - x'$) que garantice la posibilidad de determinar el punto de mínimo de f con la precisión dada, empleando para ello n observaciones.

4. Hablando en rigor, tendremos que considerar paralelamente dos problemas.

Por un lado, podemos buscar el punto de mínimo $\bar{x}$ y *también* el valor $f(\bar{x})$ que toma en él la función.

Por otro lado, podemos interesarnos *sólo* por el punto $\bar{x}$ sin ocuparnos del valor $f(\bar{x})$.

Salta a la vista que los objetivos del primer problema (llamémoslo problema A) son más amplios que los del segundo (problema B). Por consiguiente, es natural esperar que:

—dadas las posibilidades y las condiciones, el objetivo del problema A se pueda alcanzar en menor grado que el objetivo del problema B (dados el número n y la longitud L, en el problema B se logra un ε menor que en el problema A);

—para alcanzar los objetivos de ambos problemas en el mismo grado, siendo idénticas las condiciones, el problema A requiere mayores posibilidades (siendo iguales para ambos problemas el error ε y la longitud L del intervalo de variación de la función, en el problema A n será mayor);

—para alcanzar los objetivos de ambos problemas en el mismo grado, siendo idénticas las posibilidades, el problema

A requiere condiciones menos rígidas (los valores dados de n y de ε corresponden en el problema A a unos valores de L menores que en el problema B).

5. Para que los problemas enunciados adquieran rigor matemático, es preciso detenerse en un detalle importante.

Supongamos que nos interesan las posibilidades de determinar con exactitud ε el punto de mínimo $\bar{x}$ en el segmento de longitud L (podemos aceptar, por supuesto, que el origen de este segmento es el punto 0 y que su extremo es el punto L). Supongamos también que se trata del problema A, o sea, que nos interesa tanto $\bar{x}$ como $f(\bar{x})$.

Podemos escoger el siguiente procedimiento para determinar el punto $\bar{x}$.

Tomamos entre 0 y L un punto cualquiera x y calculamos los valores de f en los puntos $x - \varepsilon$, x y $x + \varepsilon$, o sea, los valores

$$f(x - \varepsilon), \ f(x) \text{ y } f(x + \varepsilon)$$

(fig. 20). Por supuesto, dentro de la arbitrariedad con que se escoge x, aceptamos que $x - \varepsilon \geqslant 0$ de modo que se puede determinar el valor $f(x - \varepsilon)$; aceptamos igualmente que $x + \varepsilon \leqslant L$.

Puede darse el caso

$$f(x - \varepsilon) > f(x) < f(x + \varepsilon).$$

Ello significará que la función f, decreciente en $x - \varepsilon$, es creciente en $x + \varepsilon$. Pero, para pasar del decrecimiento al crecimiento debemos tocar necesariamente el valor mínimo. Por eso, en nuestro caso este valor se alcanza en un punto $\bar{x}$ comprendido entre $x - \varepsilon$ y $x + \varepsilon$. Es decir, x dista de $\bar{x}$ en ε todo lo más de modo que x es el valor aproximado buscado para $\bar{x}$. En este caso han bastado tres observaciones para determinar el punto $\bar{x}$. Tal situación, repetimos, *puede darse*. Pero no existe seguridad alguna de que *efectivamente se dará*. Es más, si la longitud L es grande y ε es pequeño, este fenómeno será bastante inesperado. Todo lo contrario, lo más natural en este caso es que la función f tome en los tres puntos escogidos unos valores relativamente grandes alcanzando su mínimo en otro lugar muy distinto. Es decir, tres observaciones pueden resultar suficientes y también insuficientes.

Pero necesitamos un plan de acción que *inevitablemente* nos permita determinar $\bar{x}$ con la exactitud ε cualquiera que sea la posición de este punto $\bar{x}$. Tales planes existen. Por ejemplo, calculemos uno tras otro los valores

$$f(0),\ f(\varepsilon),\ f(2\varepsilon),\ \ldots \qquad (5.1)$$

hasta llegar a $f(r\varepsilon)$, donde $(r+1)\,\varepsilon$ es mayor que L (fig. 21). El valor buscado será, claro está, el punto $k\varepsilon$ que corresponde al menor de los valores de la sucesión (5.1).

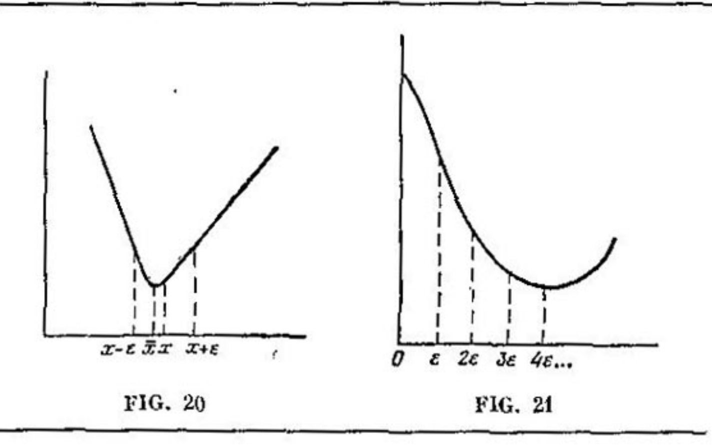


FIG. 20 FIG. 21

Pero lo que nos interesa en los problemas considerados no es determinar un plan que siempre, incluso en los casos más desfavorables, permita determinar $\bar{x}$ con la exactitud requerida, sino construir el *más económico* de estos planes, o sea, el plan «*mejor dentro de las condiciones peores*». Las condiciones más desfavorables se dan cuando llega al máximo el número de valores de la función f que debemos calcular. De la misma forma, el plan más económico es el que permite alcanzar el objetivo con el menor número de cálculos de la función.

Por eso, el plan «mejor dentro de las condiciones peores» se denomina a veces plan *minimáximo*. Nosotros emplearemos el término *óptimo*.

Por su esencia, las operaciones que recomienda el plan óptimo (tanto en este como en otros problemas semejantes)

están orientadas a la búsqueda más adecuada del mínimo que «se oculta» de nosotros y «procura situarse precisamente en un lugar donde no lo buscamos». Lo dicho no tiene nada que ver con la mística ni con las supersticiones; es simplemente la característica de la actuación mejor en las condiciones peores.

6. Es importante subrayar que no siempre existe el plan óptimo. Por ejemplo, en el problema B no existe el plan óptimo.

En efecto, sea $L = 2$ y sea $n = 2$. ¿Qué exactitud podemos garantizar?

Supongamos que los extremos de nuestro segmento son 0 y 2. Tomemos un número arbitrario, pero pequeño, α y calculemos los valores de la función f en los puntos $1 - \alpha$ y $1 + \alpha$. Si es

$$f(1-\alpha) \leqslant f(1+\alpha),$$

el punto buscado $\bar{x}$ se halla entre 0 y $1 + \alpha$; si

$$f(1-\alpha) \geqslant f(1+\alpha),$$

$\bar{x}$ se encuentra entre $1 - \alpha$ y 2.

Pongamos

$$\bar{x} = \frac{1+\alpha}{2}$$

en el primer caso y

$$\bar{x} = \frac{(1-\alpha)+2}{2} = \frac{3-\alpha}{2}$$

en el segundo.

En el peor de los casos, $\bar{x}$ difiere del punto exacto de mínimo de la función f en $\frac{1+\alpha}{2}$. Haciendo tender α al cero, reducimos el error. Pero α no puede ser igual a 0 (porque coincidirán entonces los puntos $1 - \alpha$ y $1 + \alpha$ y la comparación del valor $f(1-\alpha)$ con el valor $f(1+\alpha)$, igual al primero, no ofrecerá información alguna). Por eso, el error será siempre mayor que $\frac{1}{2}$ aunque podemos aproximarlo a este número cuanto queramos.

En la situación descrita todo valor positivo de α determina un plan. Cuanto más próximo sea α a 0, mejor será el plan. Pero como para todo $\alpha > 0$ existe un número posi-

tivo menor, cualquiera que sea el plan existe otro mejor. Es decir, el problema B no tiene plan óptimo.

Sin embargo, existen para el problema B planes «casi óptimos» cuyos resultados sólo admiten una mejora insignificante. Hablando con más precisión: cualquiera que sea $\gamma > 0$, existe un plan P_γ cuyo error no puede mejorar en más de γ ningún otro plan.

7. El plan determinado por la sucesión (5.1) no es el óptimo si ε es suficientemente pequeño en comparación con la longitud L del segmento. Ateniéndonos a este plan, tendremos que realizar r cálculos en las condiciones peores.

Procedamos, sin embargo, de otro modo. Calculemos únicamente los siguientes términos de la sucesión (5.1):

$$f(0),\ f(2\varepsilon),\ f(4\varepsilon),\ \ldots,$$

determinemos el menor de los términos de esta sucesión, digamos $f(2k\varepsilon)$, y calculemos los valores $f((2k-1)\varepsilon)$ y $f((2k+1)\varepsilon)$. Salta a la vista que, con exactitud ε, $\overline{x}$ es el valor $(2k-1)\varepsilon$, $2k\varepsilon$, ó $(2k+1)\varepsilon$ que corresponde al menor valor de f. En las peores condiciones, este nuevo plan conduce al objetivo en $\frac{r}{2}+2$ pasos aproximadamente. Si r es grande, este número es considerablemente menor que el número de cálculos que requiere el primer plan.

Por consiguiente, el plan inicial no es el óptimo ni tampoco lo es el segundo (por estas mismas razones).

Pero hay una diferencia esencial entre los planes primero y segundo: una parte de los puntos en los que el segundo plan recomienda calcular los valores de la función se fijan de antemano, mientras que la elección de los restantes está condicionada por los valores ya calculados de la función. Intuitivamente queda claro que la elección de las operaciones óptimas siempre debe estar condicionada por la información que suministran los cálculos ya realizados. En este sentido el segundo plan es más perfecto que el primero. Este segundo plan también puede ser perfeccionado y continuando estos perfeccionamientos sucesivos llegaríamos, al fin y al cabo, al plan óptimo.

Al localizar el mínimo de la función, es natural comparar todo valor nuevo obtenido para la función con los valores obtenidos en las observaciones anteriores. Por eso, la elección del punto en el que ha de realizarse el cálculo siguien-

te (o la decisión de interrumpir los cálculos) estará condicionada, en primer lugar, por los puntos en los que hemos calculado ya los valores de la función y, en segundo lugar, por estos valores de la función.

Salta a la vista que este proceso de cálculo sucesivo de los valores de la función f se determina plenamente por una correspondencia que, para todo $k \geqslant 0$, asigna a colecciones arbitrarias de números $x_1, x_2, \ldots, x_k$ y a los valores de la función f en estos puntos otro punto x_{k+1} o la decisión de interrumpir el proceso tomando como $\bar{x}$ un punto determinado. Esta correspondencia suele denominarse *función solvente.*

Todo plan determina una función solvente y, al mismo tiempo, toda función solvente determina un plan. La función solvente es, en esencia, la descripción precisa y formalizada del plan. Por ejemplo, la función solvente que determina el primero de los planes del punto anterior hace corresponder todo punto $0 \leqslant k < r$ al punto $(k+1)\,\varepsilon$, y el número r a la terminación del proceso.

El concepto de función solvente es uno de los más importantes en las Matemáticas modernas. Pero, debido a su volumen, no daremos aquí su definición exacta.

8. Supongamos que el objetivo del plan P consiste en determinar con el mínimo error y a base de n observaciones el punto $\bar{x}$ que ofrece el mínimo a la función f en un intervalo de longitud L. Lo llamaremos plan de *n pasos.*

Supongamos ahora que un plan P de n pasos permite determinar $\bar{x}$ en el segmento de longitud L con exactitud ε. Esta exactitud depende del propio plan P y también de n y de L. Por eso, podemos considerarla como una función de P, n y L e indicarla por $\tau_P^A(n, L)$ en el caso del problema A y por $\tau_P^B(n, L)$ tratándose del problema B. Por $\tau_P(n, L)$ entendremos en adelante cualquiera de las expresiones $\tau_P^A(n, L)$ o $\tau_P^B(n, L)$ (pero, por supuesto, la misma dentro de un razonamiento concreto).

En el caso del problema A, un plan P_0 de n pasos, que permite determinar el mínimo de f en el segmento de longitud L, es óptimo si $\tau_{P_0}^A(n, L)$ no es mayor que $\tau_P^A(n, L)$ cualquiera que sea el plan P, es decir, si

$$\tau_{P_0}^A(n, L) \leqslant \tau_P^A(n, L).$$

Podemos expresar esto también así

$$\tau_{P_0}^A(n, L) = \min_P \tau_P^A(n, L). \tag{5.2}$$

Por consiguiente, el número $\tau_{P_0}^A(n, L)$ ya no es una característica del plan sino una característica del propio problema (a saber, del problema que consiste en determinar el punto de mínimo de la función f mediante n pasos en el segmento de longitud L). Como este número no depende de ningún plan y sólo depende de n y de L, podemos indicarlo por $\tau^A(n, L)$.

En el problema B la situación es algo más complicada. Como hemos visto, *no existe* un plan óptimo que garantice en las condiciones peores el error mínimo. Pero existe un error al que podemos aproximarnos cuanto queramos escogiendo planes convenientes. Este error, que es natural denominarlo *error límite*, también depende sólo de las condiciones del problema de modo que es lógico indicarlo por $\tau^B(n, L)$. Cualquier plan conduce a un error mayor

$$\tau^B(n, L) < \tau_P^B(n, L)$$

y, por eso, no podemos escribir ahora una igualdad análoga a (5.2).

Anticipándonos a la exposición, diremos que el resultado de todos los razonamientos de este parágrafo (a veces difíciles) consiste en obtener unas expresiones explícitas para $\tau^A(n, L)$ y $\tau^B(n, L)$. Como veremos, en estas expresiones aparecen los números de Fibonacci:

$$\tau^A(n, L) = \frac{L}{u_{n+2}}; \tag{5.3}$$

$$\tau^B(n, L) = \frac{L}{2u_{n+1}}. \tag{5.4}$$

De aquí se deduce que la renuncia a determinar el valor mínimo de la función permite aumentar en $\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}$ veces la exactitud de localización del punto de mínimo. Para n suficientemente grande esta razón, como hemos visto en el punto 13 del § 1, se aproxima a $\frac{2}{\alpha} = 1{,}236$ lo que da un 23% más de exactitud.

9. Por supuesto lo que importará en todos los razonamientos posteriores es la razón de los números L y ε y no sus valores concretos. Esta razón representa el error relativo que se comete al determinar la posición de $\bar{x}$. Dada esta razón y escogida convenientemente la unidad de medición

para x (o sea, la unidad de medición del segmento), podemos escoger arbitrariamente uno de los números L o ε.

Esta observación lleva a la siguiente conclusión instructiva.

El cambio de la unidad de medición en el eje x influye por igual en el valor numérico de la longitud L del segmento y en el error de localización del punto buscado, cualquiera que sea el plan P. En otras palabras, para todo λ positivo se tiene

$$\tau_P(n, \lambda L) = \lambda \tau_P(n, L). \tag{5.5}$$

Idénticamente, si para describir el plan que permite determinar el punto de mínimo expresamos la posición de los puntos en unidades de longitud relativas (y no absolutas), esto no influirá en el carácter óptimo del plan: los planes óptimos seguirán siéndolo y los demás no se harán óptimos.

De aquí se deduce directamente que toda dilatación (contracción) uniforme del intervalo de definición de la función f conduce sólo a una «transformación de semejanza» del plan óptimo pero no altera su carácter de plan óptimo.

Por consiguiente, los errores $\tau_P(n, L)$ y $\tau_P(n, \lambda L)$ que figuran en (5.5) se obtienen aplicando diferentes planes pero también se pueden obtener con un mismo plan «transformándolo semejantemente».

10. Después de estas consideraciones previas, ya harto dilatadas, pasemos a determinar el plan óptimo en el problema A y a demostrar las fórmulas (5.3) y (5.4).

Lema. *Cualesquiera que sean $n \geqslant 1$ y L, existe un plan de n pasos que permite encontrar el punto de mínimo $\bar{x}$ de la función f (de un mínimo) en el segmento de longitud L empleando n pasos y que posee las propiedades siguientes:*

1) *en cada paso se considera un segmento $x'x''$;*

2) *en el primer paso se calcula el valor de la función f en uno de los puntos $\frac{u_n}{u_{n+2}} L$ ó $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} L$;*

3) *al iniciar cualquier k-ésimo paso siguiente (o sea, para $1 < k \leqslant n$) se conoce el valor de f en uno de los puntos*

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') \quad o \quad x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x'); \tag{5.6}$$

4) *en el k-ésimo paso $(1 < k \leqslant n)$ se calcula el valor de la función en el otro punto* (5.6);

5) *en el k-ésimo paso* ($1 < k \leqslant n$) *se comparan los números* $f(x_1)$ *y* $f(x_2)$; *si es* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, *en el* $(k+1)$*-ésimo paso se considera el segmento* $x'x_2$ *y si es* $f(x_1) > f(x_2)$, *se considera el segmento* x_1x''.

Demostración. Apliquemos la inducción según n.

Si $n = 1$, nuestro segmento es el que va de 0 a L, el valor de la función f se calcula en el punto $\frac{u_1}{u_3} L = \frac{L}{2}$ y no hay pasos posteriores.

Supongamos ahora que para cualquier segmento ha sido demostrada la existencia de un plan de n pasos con las propiedades señaladas en el lema. Construyamos el plan de $n+1$ pasos que nos interesa comprobando, al mismo tiempo, el cumplimiento de las condiciones del lema. En cada paso consideraremos un segmento $x'x''$.

En el primer paso escogemos el punto $x_1 = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L$ y en el segundo paso escogemos el punto $x_2 = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L$ y comparamos los valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$ de la función. Si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, pasamos al segmento comprendido entre 0 y x_2 (desempeñando 0 el papel de x' y x_2 el papel de x''); si se tiene $f(x_1) > f(x_2)$, pasamos al segmento comprendido entre x_1 y L (tomando x_1 como x' y L como x''). En ambos casos la longitud del segmento considerado es $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L$.

Realizados estos dos pasos, estaremos, respecto al segmento considerado, en las mismas condiciones que después de realizar el primer paso en un proceso de n pasos.

Efectivamente, en el segmento de longitud $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L$ se conoce el valor de la función f en el punto que dista $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L$ de uno de sus extremos. Por esto, podemos emprender este proceso de n pasos y llevarlo a cabo. En virtud de la hipótesis inductiva, podemos aceptar que para los últimos n pasos se cumplen las condiciones 3), 4) y 5). Luego, resta sólo analizar las condiciones en que comienza y se realiza el segundo paso. Pero, salta a la vista que el punto $\frac{u_n}{u_{n+3}} L$ tiene la misma forma que la primera de las expresiones (5.6) en el caso $k = 2$ si en ésta se toma $n+1$ en lugar de n; el

punto $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$ que escogemos desempeña, en la situación correspondiente, el papel de la segunda expresión.

Con esto queda demostrado el paso inductivo y también el lema.

11. El plan de n pasos, cuya existencia hemos demostrado en el lema anterior, se denomina *plan de Fibonacci de n pasos* o, abreviando, *plan F_n*.

Teorema. 1) *El plan F_n es el único plan óptimo de n pasos.*

$$2)\quad \tau_{F_n}^{A}(n, L) = \frac{L}{u_{n+2}}\,.$$

Demostración. Apliquemos la inducción según n.

Consideremos primero un plan de un paso que consiste en escoger como $\bar{x}$ un punto $\tilde{x}$ del intervalo comprendido entre x' y x''. Es evidente que en las condiciones más desfavorables el error puede alcanzar el valor del máximo de los números $x'' - \tilde{x}$ ó $\tilde{x} - x'$. Si estos números son distintos, el error máximo pasa de $\frac{L}{2}$; si los números son iguales, el error máximo es igual a $\frac{L}{2}$.

Es decir, F_1 es el plan óptimo de un paso y

$$\tau_{F_1}^{A}(1, L) = \frac{L}{2} = \frac{L}{u_3}\,.$$

Si $n = 2$, el plan F_2 consiste en calcular y comparar los valores $f\left(\frac{1}{3}L\right)$ y $f\left(\frac{2}{3}L\right)$, escogiendo para $\bar{x}$ el punto

$$\frac{1}{3}L \quad \text{si} \quad f\left(\frac{1}{3}L\right) \leqslant f\left(\frac{2}{3}L\right) \text{ y}$$

$$\frac{2}{3}L \quad \text{si} \quad f\left(\frac{1}{3}L\right) > f\left(\frac{2}{3}L\right).$$

Salta a la vista que el error máximo en la determinación del valor exacto de $\bar{x}$ llega en este caso a $\frac{L}{3} = \frac{L}{u_4}$:

$$\tau_{F_2}^{A}(2, L) = \frac{L}{u_4}\,.$$

Cualquier otra elección del punto conduce a errores mayores.

Hemos demostrado, así, la base de la inducción.

Supongamos ahora que el plan de Fibonacci F_n tiene la propiedad señalada en el teorema y consideremos los planes de $n+1$ pasos.

Realizadas en el plan F_{n+1} las dos primeras observaciones de la función f y comparados sus dos valores encontrados, reduciremos el problema a la aplicación del plan F_n en el segmento de longitud $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L$ conociendo el valor de la función f en un punto; en las peores condiciones esto conduce al error

$$\tau_{F_n}^{A}\left(n, \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L\right) = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} \tau_{F_n}^{A}(n, L) = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} \frac{L}{u_{n+2}} = \frac{L}{u_{n+3}}.$$

Por consiguiente,

$$\tau_{F_{n+1}}^{A}(n+1, L) = \frac{L}{u_{n+3}}.$$

Resta demostrar que el plan F_{n+1} es óptimo.

Tomemos con este fin los valores de la función f en dos puntos arbitrarios $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ (concretando, aceptaremos que $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$). Comparados los valores $f(\tilde{x}_1)$ y $f(\tilde{x}_2)$, tendremos que buscar el punto $\bar{x}$ en el segmento comprendido entre 0 y $\tilde{x}_2$ o en el segmento correspondiente a los puntos $\tilde{x}_1$ y L.

Si

$$\tilde{x}_1 < \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L$$

y $f(\tilde{x}_1) > f(\tilde{x}_2)$, tendremos que aplicar un plan de n pasos para determinar el punto de mínimo de f en el segmento de longitud $L - \tilde{x}_1$ mayor que

$$L - \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L = \frac{u_{n+3} - u_{n+1}}{u_{n+3}} L = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L.$$

Si el punto $\tilde{x}_2$ ocupa incluso la posición más favorable en este segmento, el error en su localización será, debido a la hipótesis inductiva, mayor que $\frac{L}{u_{n+3}}$.

Razonamientos semejantes permiten ver que todo plan que comienza con la elección de un punto

$$\tilde{x}_2 > \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L$$

también conduce, en circunstancias desfavorables correspondientes, a un error en la determinación de $\bar{x}$ mayor que el del plan F_{n+1}.

Supongamos ahora que

$$\tilde{x}_1 > \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L.$$

Si el punto $\tilde{x}$ se encuentra efectivamente entre 0 y $\tilde{x}_1$, para localizarlo nos quedan $n-1$ observaciones, mientras que la longitud del segmento que contiene ese punto es mayor que $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L$. Por consiguiente, incluso el plan F_{n-1} (que en estas condiciones es, por hipótesis, óptimo) conduce a un error mayor que

$$\tau^A_{F_{n-1}}\left(n-1,\ \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L\right) = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} \tau^A_{F_{n-1}}(n-1,\ L) =$$
$$= \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} \frac{L}{u_{n+1}} = \frac{L}{u_{n+3}}.$$

Análogamente se considera el caso

$$\tilde{x}_2 > \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L.$$

Por consiguiente, F_{n+1} es el plan óptimo y hemos demostrado el teorema.

Es decir, el único punto de mínimo de la función f puede ser localizado mediante n observaciones en el segmento de longitud L con un error que no pasa de $\frac{L}{u_{n+2}}$.

Por eso n observaciones bastan para determinar el punto de mínimo de la función f con el error ε, o con un error menor, si la longitud del segmento no pasa de εu_{n+2}.

Finalmente, para estar seguros de que el punto de mínimo de la función f queda localizado en el segmento de longitud L con un error que no pasa de ε es necesario un número n de observaciones tal que

$$u_{n+1} < \frac{L}{\varepsilon} \leqslant u_{n+2}.$$

Hemos respondido de esta forma a todas las preguntas planteadas en el punto 3.

12. Es fácil obtener la solución del problema B basándose en la solución dada para el problema A.

Supongamos que tenemos un segmento de longitud L. Realicemos los $n - 2$ pasos primeros del plan de Fibonacci F_{n-1}. Obtendremos entonces un segmento de longitud $\frac{3L}{u_{n+1}}$ con extremos en unos puntos x' y x'' conociendo, además, el valor de f en uno de los puntos $x_1 = x' + \frac{L}{u_{n+1}}$ ó $x_2 =$

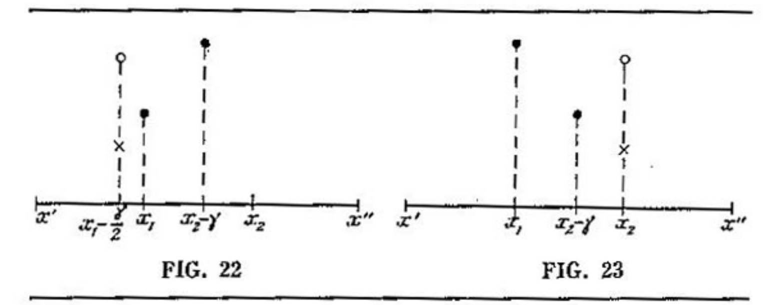


FIG. 22 FIG. 23

$= x' + \frac{2L}{u_{n+1}}$. Consideremos el primero de estos casos (el otro se analiza de un modo análogo).

Supongamos, pues, que se conoce el valor $f(x_1)$. Tomemos un número γ de valor absoluto menor que $\frac{L}{u_{n+1}}$, calculemos el valor $f(x_2 - \gamma)$ (será el $(n - 1)$-ésimo valor calculado para la función f) y comparemos los valores $f(x_1)$ y $f(x_2 - \gamma)$.

Si $f(x_1) \leqslant f(x_2 - \gamma)$ (fig. 22), está claro que $\bar{x}$ se encuentra entre x' y $x_2 - \gamma$. Calculemos el valor

$$f\left(\frac{x' + (x_2 - \gamma)}{2}\right) = f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right)$$

(este será el último, n-ésimo, valor calculado para la función f).

Si se tiene

$$f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) \leqslant f(x_1)$$

(en la fig. 22 hemos indicado este caso con la cruz $\times$), el punto $\bar{x}$ se halla entre x' y x_1. Pongamos

$$\bar{x} = \frac{x' + x_1}{2}.$$

El error que cometemos al determinar así $\bar{x}$ no pasa de la mitad de la longitud del segmento comprendido entre x' y x_1, o sea, no pasa de $\frac{L}{2u_{n+1}}$. Si es

$$f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) > f(x_1)$$

(el caso ∘ en la fig. 22), el punto $\bar{x}$ queda situado entre $x_1 - \frac{\gamma}{2}$ y $x_2 - \gamma$. Tomando

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) + (x_2 - \gamma)\right],$$

cometemos un error que no pasa de

$$\frac{1}{2}\left[(x_2 - \gamma) - \left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{\gamma}{4} = \frac{L}{2u_{n+1}} - \frac{\gamma}{4}.$$

Sea ahora $f(x_1) > f(x_2 - \gamma)$ (fig. 23). Entonces $\bar{x}$ está entre x_1 y x''.

Calculemos $f(x_2)$ (el último valor calculado para f). Si

$$f(x_2 - \gamma) \leqslant f(x_2)$$

(el caso ∘ de la fig. 23), el punto $\bar{x}$ se encuentra entre x_1 y x_2; tomando $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, cometemos un error de $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{L}{2u_{n+1}}$ todo lo más.

Por último, si

$$f(x_2 - \gamma) > f(x_2)$$

(el caso × de la fig. 23), el punto $\bar{x}$ se halla entre $x_2 - \gamma$ y x''; tomando $\bar{x} = \frac{1}{2}[x'' + (x_2 - \gamma)]$, cometemos un error que no pasa de

$$\frac{1}{2}[x'' - (x_2 - \gamma)] = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{u_{n+1}} + \gamma\right) = \frac{L}{2u_{n+1}} + \frac{\gamma}{2}.$$

Es decir, en el peor de los casos nuestro error puede llegar a $\frac{L}{2u_{n+1}} + \frac{\gamma}{2}$ si $\gamma > 0$ y a $\frac{L}{2u_{n+1}} - \frac{\gamma}{4}$ si $\gamma < 0$. Sin embargo,

como la elección del número γ depende de nosotros, podemos aproximar el error a $\frac{L}{2u_{n+1}}$ tanto como queramos.

Sólo resta demostrar que el error $\frac{L}{2u_{n+1}}$ no puede ser disminuido.

Pero del teorema del punto 11 se deduce que cualquier modificación en los primeros $n - 2$ pasos del plan descrito conduce al aumento de la longitud del segmento donde se realizan los cálculos posteriores para localizar el punto de mínimo y, por ende, conduce al aumento del error máximo. Resta sólo mostrar que son óptimas las operaciones que se realizan en los dos últimos pasos.

Señalemos, ante todo, que la modificación de las operaciones descritas puede consistir en que para $\bar{x}$ se tome no el punto medio del segmento, donde efectivamente se halla ese punto, sino otro punto. Está claro que el error posible será igual entonces a la parte mayor del segmento, es decir, el error aumenta. Luego, debemos necesariamente escoger el punto medio del segmento.

Además, podemos realizar el último cálculo de f en un punto que no sea próximo a x_1 (a x_2, respectivamente). Pero el error posible en este caso aumentará proporcionalmente a la distancia entre estos puntos.

Por último, lo mismo ocurre si para el penúltimo cálculo de la función f se escoge un punto alejado de x_2 (respectivamente de x_1).

Es decir, ninguna modificación del plan descrito podrá hacer disminuir el error posible en menos de $\frac{L}{2u_{n+1}}$. Con esto queda resuelto el problema B.

El lector podrá responder a todas las demás preguntas planteadas en el punto 3 con relación al problema B.

13. En los puntos anteriores, además de describir el plan de búsqueda, hemos dado precisiones acerca del planteamiento del problema, enunciados sobre el concepto del plan óptimo y fundamentos del carácter óptimo del plan construido. Tales disgresiones son elementos inseparables de cualquier razonamiento matemático que tiene como fin, además de *explicar* el proceso, *demostrar* que este proceso es precisamente el que nos interesa. En muchos casos se precisa, sin embargo, la descripción exacta de las operaciones

como tales y pierde su importancia toda la argumentación de las mismas; por ejemplo, cuando se ha solucionado ya un problema y se trata aplicar el método empleado. En estos casos, más que la base matemática de la justeza de la solución, necesitamos instrucciones precisas, que no dejen lugar a ninguna ambigüedad, sobre el modo de aplicar ese método.

El plan de la búsqueda más exacta del punto de mínimo $\bar{x}$ para la función f en el segmento desde x' hasta x'' en el caso del problema A, cuando sólo se trata de alcanzar los objetivos «prácticos» señalados, se asemeja al plan que permite definir la especie de una planta mediante el clasificador botánico. (Notemos que la clasificación de una planta es también búsqueda.) Adquiere la forma siguiente (si no se indica a qué punto se debe pasar, ha de pasarse al siguiente):

1°. Comparar 1 y n:
   a) si $n = 1$, pasar al punto 2°;
   b) si $n > 1$, pasar al punto 4°.

2°. Calcular $\bar{x} = \frac{x' + x''}{2}$.

3°. Calcular $f(\bar{x})$ y concluir el proceso.

4°. Calcular

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x')$$

y

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x').$$

5°. Calcular $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

6°. Comparar 2 y n:
   a) si $n = 2$, pasar al punto 7°;
   b) si $n > 2$, pasar al punto 10°.

7°. Comparar $f(x_1)$ y $f(x_2)$:
   a) si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, pasar al punto 8°;
   b) si $f(x_1) > f(x_2)$, pasar al punto 9°.

8°. Tomar $\bar{x} = \bar{x}_1$ y concluir el proceso.

9°. Tomar $\bar{x} = \bar{x}_2$ y concluir el proceso.

10°. Comparar $f(x_1)$ y $f(x_2)$:
   a) si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, pasar al punto 11°;
   b) si $f(x_1) > f(x_2)$, pasar al punto 14°.

11°. Indicar x_2 por x'',

$$x_1 \text{ por } x_2,$$
$$n-1 \text{ por } n.$$

12°. Calcular

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x').$$

13°. Calcular $f(x_1)$ y pasar al punto 6°.
14°. Indicar

$$x_1 \text{ por } x',$$
$$x_2 \text{ por } x_1,$$
$$n-1 \text{ por } n.$$

15°. Calcular

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x').$$

16°. Calcular $f(x_2)$ y pasar al punto 6°.

14. Esta descripción del plan óptimo de la búsqueda del mínimo de la función f es absolutamente exacta y no deja lugar a licencia alguna. Aplicado a cada función concreta f, al segmento desde x' hasta x'' y al número n señala una sucesión precisa de operaciones. Sin embargo, esta descripción es bastante enrevesada y difícil de abarcar.

Por eso damos otra descripción de este plan en forma de un esquema (fig. 24).

Tales esquemas suelen llamarse *bloque*. La elaboración del esquema bloque es, comúnmente, la primera etapa en la elaboración del programa para la computadora.

15. Para concluir, veamos un ejemplo de aplicación del plan descrito en los puntos 13 y 14 buscando mediante 5 cálculos en el segmento desde 1 hasta 2 el punto $\bar{x}$ que ofrece el mínimo a la función

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}.$$

Anticipemos una observación importante.

La búsqueda del punto que ofrece el mínimo (o el máximo) de una función dada en forma *analítica* (o sea, mediante una fórmula que permite calcular los valores de la función) es preferible realizar empleando no los métodos de la Teoría de la búsqueda, sino otros métodos, más adaptados a esta

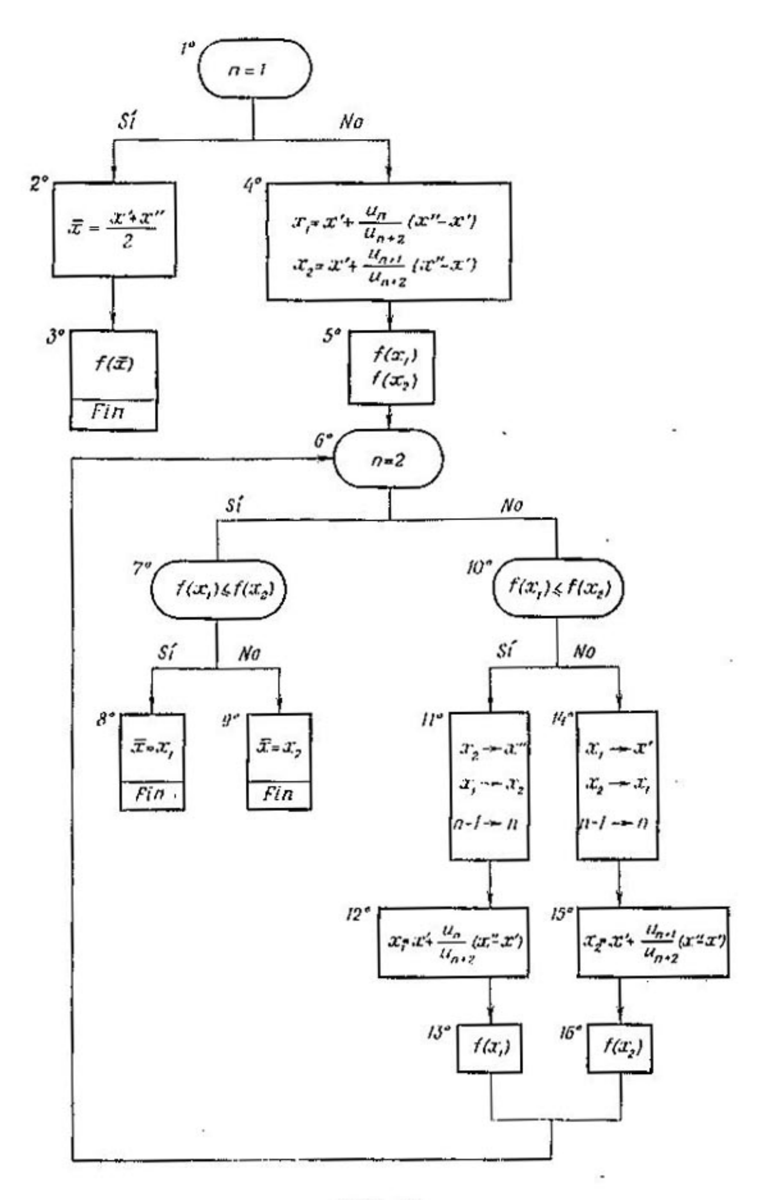

1°
n = 1
Sí
No
2°
$\bar{x} = \frac{x'+x''}{2}$
4°
$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x''-x')$
$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x''-x')$
3°
$f(\bar{x})$
Fin
5°
$f(x_1)$
$f(x_2)$
6°
n=2
Sí
No
7°
$f(x_1) \leq f(x_2)$
10°
$f(x_1) \leq f(x_2)$
Sí
No
Sí
No
8°
$\bar{x} = x_1$
Fin
9°
$\bar{x} = x_2$
Fin
11°
$x_2 \rightarrow x''$
$x_1 \rightarrow x_2$
$n-1 \rightarrow n$
14°
$x_1 \rightarrow x'$
$x_2 \rightarrow x_1$
$n-1 \rightarrow n$
12°
$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x''-x')$
15°
$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x''-x')$
13°
$f(x_1)$
16°
$f(x_2)$

FIG. 24

situación, que forman parte del Cálculo diferencial. Por eso, debe tenerse en cuenta que nuestro ejemplo es puramente ilustrativo. El Cálculo diferencial permite encontrar fácilmente que en este caso $\bar{x} = \sqrt[3]{4} = 1{,}5874011\ldots$ Nosotros obtendremos una aproximación mucho más tosca. Sin embargo, cuando de antemano no se conoce nada acerca de la función (a excepción de que pasa del crecimiento al decrecimiento) o si las expresiones que la definen son muy complejas, los métodos del Cálculo diferencial no se pueden aplicar y la Teoría de búsqueda resulta un instrumento útil.

1°. Comparando $n = 5$ y 1, tenemos $n \neq 1$, y, por eso, pasamos al punto 4°.

4°. Calculamos

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1 + \frac{5}{13}(2 - 1) = 1{,}38461,$$

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1 + \frac{8}{13}(2 - 1) = 1{,}61538.$$

5°. Calculamos

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1} = f(1{,}38461) =$$
$$= 0{,}72222 + 1{,}17670 = 1{,}89892,$$
$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1{,}61538) =$$
$$= 0{,}61905 + 1{,}27098 = 1{,}89003.$$

6°. Comparando $n = 5$ y 2, tenemos $n \neq 2$ y, por eso, pasamos al punto 10°.

10°. Comparando

$$f(x_1) = 1{,}89892 \text{ y } f(x_2) = 1{,}89003$$

vemos que $f(x_1) > f(x_2)$; pasamos por eso al punto 14°.

14°. Indicamos

$$x_1 \rightarrow x' = 1{,}38461,$$
$$x_2 \rightarrow x_1 = 1{,}61538,$$
$$n = 4.$$

15°. Calculamos

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') =$$
$$= 1{,}38461 + \frac{5}{8}(2 - 1{,}38461) = 1{,}76927.$$

16°. Calculamos

$$f(x_2)=\frac{1}{x_2}+\sqrt{x_2}=f(1{,}76927)=$$
$$=0{,}56522+1{,}33012=1{,}89534$$

y pasamos al punto 6°.

6°. Comparamos $n=4$ y 2; puesto que $n\neq 2$, pasamos al punto 10°.

10°. Comparamos $f(x_1)=1{,}89003$ y $f(x_2)=1{,}89534$; puesto que $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, pasamos al punto 11°.

11°. Indicamos

$$x_2\to x''=1{,}76923,$$
$$x_1\to x_2=1{,}61538,$$
$$n=3.$$

12°. Calculamos

$$x_1=x'+\frac{u_n}{u_{n+2}}(x''-x')=$$
$$=1{,}38461+\frac{2}{5}(1{,}76923-1{,}38461)=1{,}53846.$$

13°. Calculamos

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}+\sqrt{x_1}=f(1{,}53846)=$$
$$=0{,}65000+1{,}24035=1{,}89035$$

y pasamos al punto 6°.

6°. Comparamos $n=3$ y 2; puesto que $n\neq 2$, pasamos al punto 10°.

10°. Comparamos

$$f(x_1)=1{,}89035 \text{ y } f(x_2)=1{,}89003;$$

puesto que $f(x_1)>f(x_2)$, pasamos al punto 14°.

14°. Indicamos

$$x_1\to x'=1{,}53846,$$
$$x_2\to x_1=1{,}61538,$$
$$n=2.$$

15°. Calculamos

$$x_2=x'+\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x''-x')=$$
$$=1{,}53846+\frac{2}{3}(1{,}76923-1{,}53846)=1{,}69231.$$

16°. Calculamos

$$f(x_2)=\frac{1}{x^2}+\sqrt{x_2}=f(1{,}69231)=$$

$$=0{,}59091+1{,}30089=1{,}89170$$

y pasamos al punto 6°.

6°. Comparando n y 2, tenemos $n=2$ y pasamos al punto 7°.

7°. Comparamos

$$f(x_1)=1{,}89003 \text{ y } f(x_2)=1{,}89170;$$

puesto que $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, pasamos al punto 8°.

8°. Tomamos $\overline{x}=1{,}61538$.

En virtud del teorema del punto 11, el valor encontrado para $\overline{x}$ difiere de la posición exacta del punto de mínimo en $\frac{1}{u_{n+2}}=\frac{1}{u_7}=\frac{1}{13}=0{,}077$ todo lo más. De hecho el error cometido es menor: es igual a 0,028. Nótese que el valor obtenido como mínimo de la función f, o sea, $f(\overline{x})$, es igual a 1,89003 y difiere sólo en 0,00015 del valor mínimo exacto de f, igual a

$$f(\sqrt[3]{4})=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}=1{,}88988.$$

De aquí se deduce que durante el cálculo los valores de x se pueden determinar con menor precisión que los valores de f.

Esta conclusión no tiene nada de extraño por sí misma. En efecto, la exactitud límite con la que determinamos los valores de x depende de la exactitud con la que podemos determinar en nuestras condiciones el valor del punto de mínimo $\overline{x}$ $\left(\text{sabemos que esta exactitud es igual a } \frac{1}{u_{n+2}}\right)$. En cambio, los valores de la función f deben buscarse con la exactitud que permita comparar dos valores suyos determinando cada vez el valor mínimo y el valor máximo. Por eso, si los valores $f(a)$ y $f(b)$ difieren considerablemente y si esta diferencia se observa ya al calcular toscamente $f(a)$ y $f(b)$, podemos determinarlos con poca precisión. Al contrario, si los valores $f(a)$ y $f(b)$ son próximos, debemos realizar cálculos más precisos para determinar el mayor. Puesto que al principio (antes de comenzar los cálcu-

los) desconocemos la diferencia entre los valores comparados de la función, podemos «no dar en el blanco» y calcularlos con exactitud insuficiente para decidir cuál de estos valores es el mayor. En este caso habrá que repetir los cálculos realizándolos con mayor precisión lo que exigirá esfuerzos complementarios.

Todo lo dicho plantea la necesidad de estudiar el problema sobre la posibilidad de «dirigir la exactitud» en el proceso de cálculo. Sin embargo, estos problemas son bastante complejos y no entran ya directamente en el tema de nuestro libro.

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial MIR, I Rizhski per. 2, 129820, Moscú, GSP, I-110, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

Este año se publicarán las siguientes obras
de nuestro sello editorial
"**Lecciones populares de matemáticas:**

1. Bársov A.
¿Qué es la programación lineal?

2. Beskin N.
Representación de figuras espaciales

3. Boltianski V.
La envolvente

4. Markuschévich A.
Curvas maravillosas
Números complejos y representaciones conformes
Funciones maravillosas

5. Natansón I.
Problemas elementales de máximo y mínimo
Suma de cantidades infinitamente pequeñas

6. Trajtenbrot B.
Los algoritmos y la solución automática
de problemas

Editorial MIR



Moscú